План

1 Квадратные неравенства.

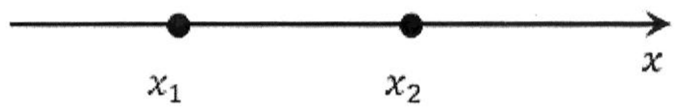
Квадратным неравенством называют неравенство вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$

Алгоритм:

1. Записываем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и решаем его. Получаем x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения.
2. Подставляем в формулу коэффициент a и корни. Записываем неравенство в виде:

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

3. Определяем интервалы на числовой прямой (корни уравнения делят числовую ось на интервалы):



4. Определяем «знаки» на интервалах (+ или –) путём подстановки произвольного значения «x» из каждого полученного интервала в выражение:

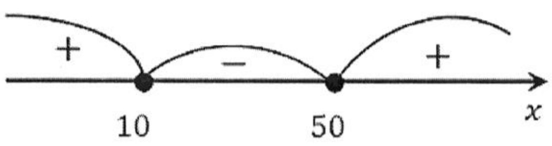
$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

и отмечаем их.
5. Остаётся лишь выписать интересующие нас интервалы.
Далее записываем ответ.

Пример 1:
$x^2 - 60x + 500 \leq 0$
Решаем квадратное уравнение :
$x^2 - 60x + 500 = 0$
$D = b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 500 = 3600 - 2000 = 1600$
Находим корни:
$x_1 = 50 \;\; x_2 = 10$
Разлагаем квадратный трехчлен на множители по формуле, получаем:

$$x^2 - 60x + 500 = (x - 50)(x - 10)$$

Записываем неравенство в виде $(x - 50)(x - 10) \leq 0$
Корни уравнения делят числовую ось на интервалы. Определяем знаки на каждом из них.Выбираем нужный промежуток.



Ответ: $x \in [10;50]$

Графический метод.

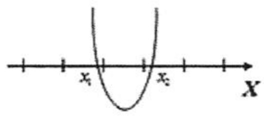
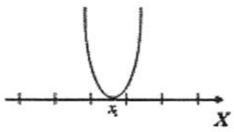
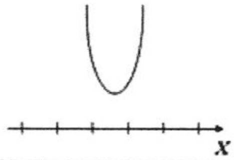
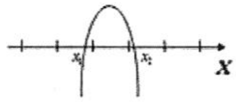
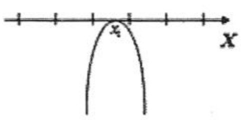
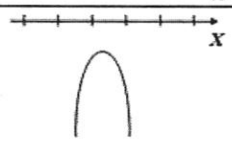
При решении квадратного неравенства необходимо найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Для этого необходимо найти дискриминант данного квадратного уравнения. Можно получить 3 случая:

1) D=0, квадратное уравнение имеет один корень;

2) D>0 квадратное уравнение имеет два корня;

3) D<0 квадратное уравнение не имеет корней.

В зависимости от полученных корней и знака коэффициента a возможно одно из шести расположений графика функции $y = ax^2 + bx + c$

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ больше нуля, то это числовой промежуток находится там, где парабола лежит выше оси ОХ.

Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ меньше нуля, то это числовой промежуток, где парабола лежит ниже оси ОХ.

Если квадратное неравенство нестрогое, то корни входят в числовой промежуток, если строгое - не входят.

Алгоритм:

1.Подготавливаем неравенство к решению путём тождественных преобразований.

2.Делаем из неравенства уравнение.Решаем его,находим корни.

3.Рисуем ось х,отмечаем точками корни уравнения.

4.Схематично рисуем параболу по исходному выражению.

5.Определяем области +/- на рисунке.Выбираем нужные области по исходному неравенству и записываем ответ.

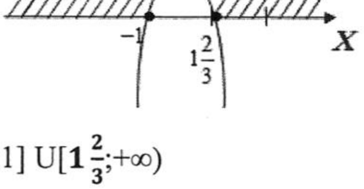
Пример 1:

$$-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$$

$$D = 64$$

$$x_1 = -1 \;\; x_2 = 1\frac{2}{3}$$

Изображаем параболу,отмечаем промежутки,где ниже оси ОХ,так как " $\leq$ "



Ответ: x∈(-∞;1] U[$1\frac{2}{3}$;+∞)

Пример 2:

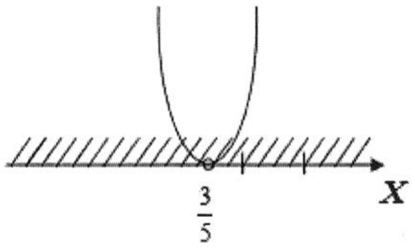
Решить неравенство.

$$\mathbf{25x^2 - 30x + 9} > 0$$

D=0

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{3}{5}}$$

Изображаем параболу,отмечаем промежутки,где она выше OX,так как “>”



Ответ: $(-\infty;\frac{3}{5})$ U$(\frac{3}{5};+\infty)$

Метод “ расщепления”.

$$ax^2 + bx + x > 0 \text{ и } x_1,x_2 - \text{корни, то по формуле } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ и } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ и } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом,при применении правила расщепления неравенств необходимо сначала аккуратно выписать все случаи,когда это неравенство справедливо,т.е выписать совокупность соответствующих систем неравенств,а затем решить каждую из этих систем и объединить в ответе полученные множества решений.

2 Рациональные неравенства.

Рациональным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида f(x)<g(x), где f(x) и g(x) — рациональные выражения, т.е. алгебраические выражения, составленные из чисел, переменной x и с помощью математических действий,т.е. операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень.

Алгоритм:

1. Разлагаем на множители (если это возможно*).
2. Находим нули .
3. Отмечаем корни (нули) функции на оси в порядке возрастания. Эти числа разбивают числовую ось на интервалы. На каждом из этих интервалов выражение сохраняет знак, а, переходя через отмеченные точки, меняет знак на противоположный (или не меняет, если корень – четной кратности).
4. Расставляем знаки на интервалах, начиная от крайнего правого.
5. Выбираем подходящие нам промежутки, записываем ответ.

Пример 1:

Решить неравенство .

$\frac{x^2+3}{2x^2-7x-4}>0$

Решение:
1. Найдём корни квадратного трёхчлена $2x^2-7x-4$
и разложим его на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$2x^2-7x-4=0$$

D=81

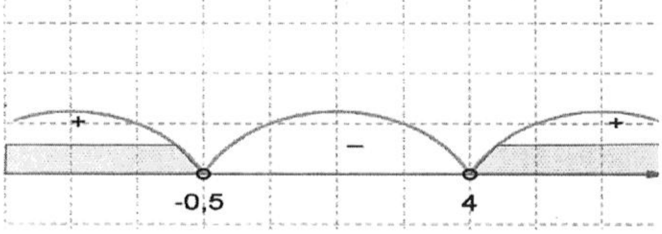
$$x_1=-\frac{1}{2}\ \ x_2=4$$

$$\frac{x^2+3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)}>0$$

Разделим обе части неравенства на положительное при всех значениях x выражение x^2+3, при этом знак неравенства > не поменяется.Получаем:

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)}>0$$

3.Отметим на числовой прямой корни,расставим знаки и выберем нужные промежутки:



Ответ: (−∞;−0,5) U (4;+∞)

3 Метод лепестков.

Решение неравенств с кратными критическими значениями переменной связано, обычно, с наибольшими сложностями. Если ранее можно было расставлять знаки на интервалах просто чередуя их, то теперь при переходе через критическое значение знак всего выражения может не измениться. Мы познакомимся с так называемым методом «лепестков», который поможет преодолеть трудности, связанные с расстановкой знаков функции на интервалах.

Рассмотрим пример: $(x+3)^2 > 0$

Левая часть имеет единственную критическую точку x = - 3. Отметим ее на числовой прямой. Эта точка имеет кратность 2, поэтому можно считать, что у нас две слившиеся критические точки, между которыми также есть интервал с началом и концом в одной и той же точке -3. Будем отмечать такие интервалы «лепестками», как на рис.3. Таким образом, получились три интервала: два числовых промежутка (-∞; -3); (-3; +∞) и «лепесток» между ними. Осталось расставить знаки. Для этого вычислим знак на интервале, содержащего ноль, и на остальных расставим знаки, просто их чередуя. Результат расстановки знаков показан на рис.4

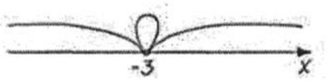


Рис. 3

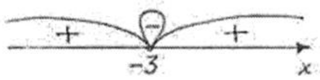


Рис. 4

Ответ: x Є (-∞; -3) U (-3; +∞)

Рассмотрим теперь более сложное неравенство :

$\frac{(x-3)^2(4+x)}{(1+x)(x-6)^3} \geq 0$

Введем функцию:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2(4+x)}{(1+x)(x-6)^3}$$

Отметим на числовой прямой критические точки, учитывая их кратность.На каждую дополнительную скобку с данным критическим значением рисуем дополнительный «лепесток». Так, на рис.7 у точки x=3 появится один «лепесток», так как $(x-3)^2$=(x-3)(x-3).

Поскольку $(x - 6)^3$ = (x - 6) (x - 6) (x - 6), у точки x = 6 появляются два «лепестка». Первым множитель учитывается точкой 6 на оси, а два дополнительных множителя учитываются добавлением двух «лепестков». Далее определяем знак на одном из интервалов и расставляем знаки на остальных, чередуя минусы и плюсы.

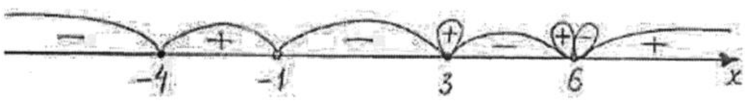


Рис. 7

Все промежутки, отмеченные знаком «+», и темные точки дают ответ.

Ответ:X Є [-4;-1) U {3} U (6;+∞).

4 Иррациональные неравенства.

Иррациональными называются неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень.

Иррациональное неравенство, как правило, сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

1. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

4. $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g^2(x) \end{cases}$

5. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$

6. $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$

Алгоритм:

1.Находим область определения.

2.Заменяем иррациональное неравенство соответствующим иррациональным уравнением.

3.Находим корни иррационального уравнения.

4.Наносим корни и область определения на координатную прямую и определяем знак выражения на каждом из образовавшихся промежутков.

5.Записываем ответ.

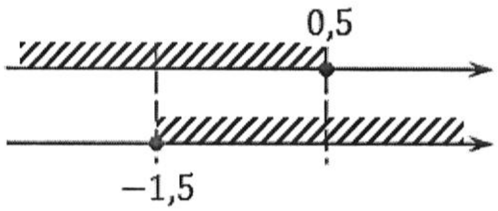
Пример 1:

$\sqrt{2x+3} \leq 2$

Имеем:

$$\sqrt{2x+3} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3 \leq 4 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 1 \\ 2x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0{,}5 \\ x \geq -1{,}5 \end{cases}$$

Из трех неравенств к концу решения осталось только два. Потому что неравенство $2 \geq 0$ выполняется всегда. Пересечем оставшиеся неравенства:



Ответ: x ∈ [-1,5;0,5]

5 <u>Неравенства с модулем.</u>

При решении неравенств,содержащих знак модуля,следует разбить ОДЗ неравенства на множетсва,на каждом из которых выражения,стоящие под знаком модуля,сохраняют знак.На кадом таком множестве нужно решать неравенство и полученные решения объединять в множество решений исходного неравенства.

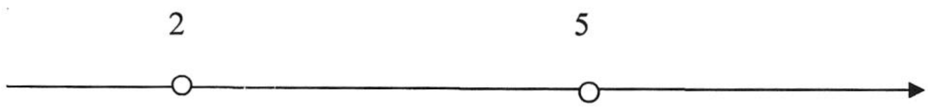
<u>Пример 1:</u>

$|x-2|+3x>|x-5|-18$

$x-2=0$ $\qquad$ $x-5=0$

$x=2$ $\qquad$ $x=5$

2 и 5 разбивает координатную прямую на промежутки знакопостоянтсва.



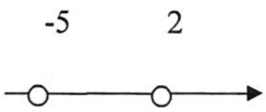
А) $x \in(-\infty;2)$ $\qquad$ Б) $x \in[2;5)$ $\qquad$ В) $x \in[5;+\infty)$

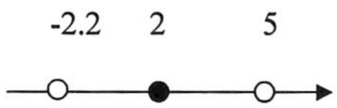
$2-x+3x>5-x-18$ $\qquad$ $x-2+3x>5-x-18$ $\qquad$ $x-2+3x>x-5-18$

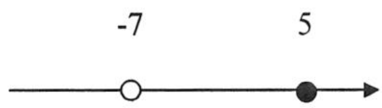
$-x+3x+x>-18+5-2$ $\qquad$ $x+3x+x>5-18+2$ $\qquad$ $4x-x>2-5-18$

$3x>-15$ $\qquad$ $5x>-11$ $\qquad$ $3x>-21$

$x>-5$ $\qquad$ $x>2-\frac{1}{5}$ $\qquad$ $x>-7$







$x \in(-5;2)$ $\qquad$ $x \in[2;5)$ $\qquad$ $x \in[5;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-5;2) \\ x \in [2;5) \\ x \in [5;+\infty) \end{array}\right. \qquad x \in(-5;+\infty)$$

Исходя из этого, выведем **<u>алгоритм</u>** решения неравенств с модулем:

1.Приравниваем к нулю каждое выражение,стоящее под знаком модуля и выражаем “X”

2.Отмечаем на координатной прямой получившиеся точки,которые разбивают область определения на промежутки знакопостоянства.

3.Решаем данное неравенство на каждом из образовавшихся промежутков.

4.Объединяем решения,получившиеся на каждом промежутке.

6 Тригонометрические неравенства.

Метод интервалов особо эффективен при решении неравенств,содержащих тригонометрические функции.При решении этим методом чисто тригонометрических неравенств вместо числовой оси удобно использовать числовую окружность,которая крнями соответствующих тригонометрических уравнений разбивает на дуги,играющие ту же роль,что и интервалы на числовой оси.

a)$\sin x \le a$; $\sin x \ge a$; $\sin x < a$; $\sin x > a$;

b)$\cos x \le a$; $\cos x \ge a$; $\cos x < a$; $\cos x > a$;

c)$\mathrm{tg} x \le a$; $\mathrm{tg} x \ge a$; $\mathrm{tg} x < a$; $\mathrm{tg} x > a$;

d)$\mathrm{ctg} x \le a$; $\mathrm{ctg} x \ge a$; $\mathrm{ctg} x < a$; $\mathrm{ctg} x > a$,

где а-любое действительное число,т.е $a \in R$.

Неравенства такого вида называются тригонометрическими.

Алгоритм:

1.с помощью тригонометрических формул разложить на множители.

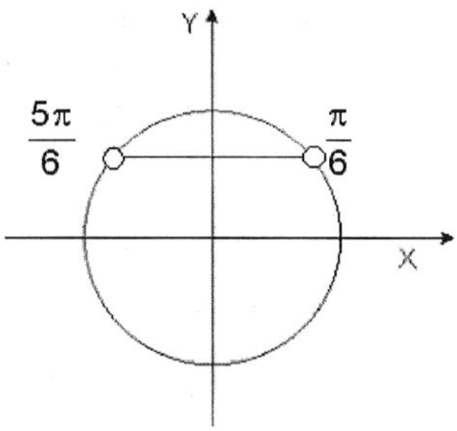
2.Найти точки разрыва и нули функции,поставить их на окружность.

3.Взять любую точку М(но не найденную ранее) и выяснить знак произведения.Если произведение положительное,то поставить точку за единичной окружностью на луче,соответствующему углу.Иначе точку поставить внутри окружности.

4.Если точка встречается четное число раз,назовем ее точкой четной кратности,если нечетное число раз-точкой нечетной кратности.Провести дуги следующим образом:начать с точки М,если следующая тчка нечетной кратности,то дуга пересекает окружность в этой точке,если же точка четной кратности,то не пересекает.

Пример 1:

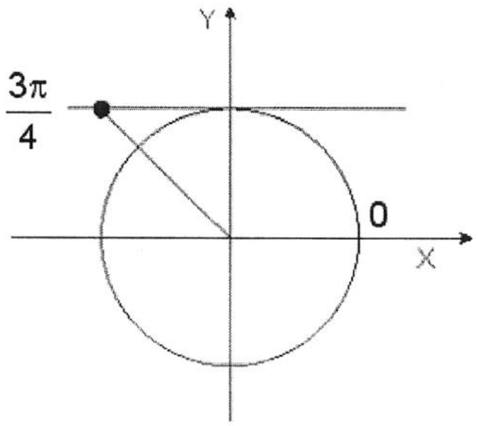
$$\sin x > \frac{1}{2}$$



Ответ:$x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n) n \in z$

Пример 2:

$\operatorname{ctg} x \geq -1$



Ответ: $x \in (\frac{3\pi}{4} + \pi n; 2\pi n) n \in z$

Пример 3:

$\cos 3x + \cos x > 0$

$2 \cos 2x \cos x > 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \epsilon Z \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z \end{array}\right.$

Точки первой серии: $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$

Точки второй серии: $\pi/2,\ 3\pi/2$

Каждая точка встречается нечетное число раз, то есть все точки нечетной кратности.

Выясним знак произведения при x=0: $2 \cos 2x \cos x > 0$

Отметим все точки на единичной окружности (рис.3):

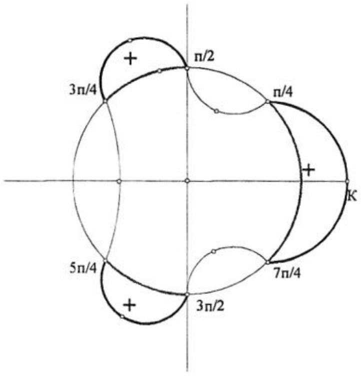


рис. 3

Ответ: $\pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \epsilon Z$

$5\pi/4 + 2\pi k < x < 3\pi/2 + 2\pi k, \qquad k \epsilon Z$

$-\pi/4 + 2\pi l < x < \pi/4 + 2\pi l, \qquad l \epsilon Z$

7 Показательные неравенства.

Показательными называются неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных неравенств в основном сводится к решению неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ или $a^{f(x)} < a^{g(x)}$($a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$)).Для решения таких неравенств используются следующие утверждения:

1)если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$,то при $a>1$ следует $f(x)>g(x)$;

2)если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$,то при $0<a<1$ следует $f(x)<g(x)$

При решении показательных неравенств(или их систем) следует учитывать общие свойства неравенств,свойства монотонности показательной функции и допустимые значения переменных.

Алгоритм:

1.Заменяем знак неравенства знаком равно.

2.находим корни получившегося уравнения.

3.Наносим корни на координатную прямую.

4.Определяем знак выражения на каждом промежутке знакопостоянства.

Пример 1:

$2^x + 2^{3-x} < 9$

Решение:

$$2^x + \frac{2^3}{2^x} < 9$$

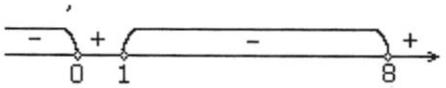
$$2^x + \frac{8}{2^x} - 9 < 0$$

Обозначим $2^x = y$

$$y + \frac{8}{y} - 9 < 0$$

$$\frac{y^2-9y+8}{y}>0$$

$$\frac{(y-8)(y-1)}{y} < 0$$



$$\left[\begin{array}{l} y < 0 \\ 1 < y < 8 \end{array}\right.$$

а) $2^x < 0$. Неравенство решений не имеет, т.к. $2^x > 0$.

б) $1 < 2^x < 8$;

$2^0 < 2^x < 2^3$;

$0 < x < 3$, т.к. функция $y = 2^x$ возрастает.

Ответ: (0; 3).

8 Логарифмические неравенства.

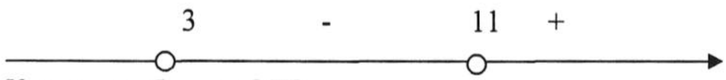
Неравенство,содержащее переменную под знаком логарифма,называется логарифмическим неравенством.

Всякое значение переменной,при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство,называется решением логарифмического неравенства.

Решить логарифмическое неравенство-значит найти все его решения или доказать ,что их нет.

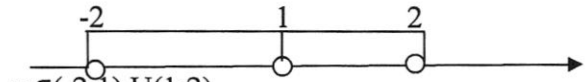
Пример 1:

Решим неравенство.
$\log_2(x-3) \leq 3$
$\log_2(x-3) - 3 \leq 0$
Найдем ОДЗ:
x-3>0
x>3
Найдем корни данного неравенства:
$\log_2(x-3) = 3$
По определению:
$x-3=2^3$
x-3=8
x=11
Отметим найденный корень на ОДЗ:



Корень разбивает ОДЗ на промежутки знакопостоянства.
Найдем знаки выражения на каждом из двух промежутков.
Итак, $x \in (3;11)$.
Рассмотрим решение следующего логарифмического неравенства:
$\log_{2-x}(x+2) * \log_{x+3}(3-x) \leq 0$
Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} X+2>0 \\ 3-X>0 \\ 2-X>0 \\ X+3>0 \\ 2-X\neq 1 \\ X+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X>-2 \\ X<3 \\ X<2 \\ X>-3 \\ X\neq 1 \\ X\neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X>-2 \\ X<2 \\ X\neq 1 \\ X\neq -2 \end{cases}$$



$x \in (-2;1) \cup (1;2)$

Найдем корни каждого множителя,для этого приравниваем к нулю:

$\log_{2-x}(x+2) = 0$ или $\log_{x+3}(3-x) = 0$

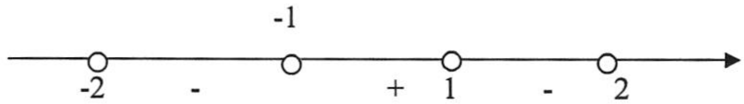
По определению

$(2-x)^0 = x+2$ $\quad\quad$ $3\text{-}x=(x+3)^0$

X+2=1 $\quad\quad$ 3-x=1

X=-1 $\quad\quad$ x=2-не входит в ОДЗ.

Отметим найденные корни на области допустимых значений:



Найдем знаки выражения на каждом из трёх промежутков знакопостоянства.

$\log_{2-x}(x+2)$ $\quad$ - + -

$\log_{x+3}(3-x)$ $\quad$ + + +

Мы возьмем 1 и 3 промежутки,а так как неравенство нестрогое,то и x=-1,тогда ответ будет: $x \in (-2;-1] \cup (1;2)$.

<u>Итак,чтобы решить логарифмическое неравенство методом интервалов,нужно:</u>

1.Найти ОДЗ.

2.Корни данного неравенства

3.Определить знак выражения на каждом из образовавшихся промежутков.

4.Выбрать те,что соответствуют неравенству.

Заключение.

В данной работе мы рассмотрели решение неравенств методом интервалов,кторый является универсальным для всех видов.Я надеюсь,что это пособие может послужить неплохим справочным материалом при решении тех или иных неравенств.

Основное направление данного пособия заключается в том,чтобы научить учащихся сторить математические модели,выбирать и составлять нужный алгоритм для решения поставленной задачи.

Пособие будет также полезно учащимся,которые обучаются на спецкурсах,изучают прикладные курсы,готовятся к ЕНТ или выпускным экзаменам,так как содержит типы неравенств,которые могут быть предложены на вступительных экзаменах и тестировании.Все это,как мы надеемся,должно помочь учащимся.

В заключении хотелось бы отметить,что при написании данного пособия я не ставила себе цели показать легкие способы решения неравенств,а глубже рассмотреть именно решение методом интервалов,ведь он играет важную роль в образовательной программе.

Список литературы:

1.А.Н.Шаныбеков-“Алгебра 8 класс.”
2. А.Н.Шаныбеков-“Алгебра 9 класс.”
3.Б.Г.Зив, В.А.Гольдич- “Алгебра и начала анализа”
4.И.Ф.Шарыгин-“Факультативный курс по математике 10 класс”
5.Г.А.Ястребинецкий-“Задачи с параметрами”
6.В.Г.Болтянский,Ю.В.Сидоров,М.И.Шабунин-“Лекции и задачи по элементарной математике”
7.В.С.Крамор-“Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начало анализа”
8.Р.А.Калнин-“Алгебра и элементарные функции”
9.А.Н.Колмогоров,А.М.Абрамов,Ю.П.Дудницын-“Алгебра и начало анализа 10-11 класс”
10.И.Я.Виленкин,А.И.Виленкин,Г.С.Сурвилло-“Алгебра 8 класс”
11.М.Л.Галицкий,А.М.Гольдман,Л.И.Звавич-“Сборник задач по алгебре 8-9 класс”
12.А.А.Рывкин,Е.Б.Ваховский-“Задачи по элементарной математике”
13.В.Н.Литвиненко,А.Г.Морднович-“Практикум по элементарной математике”
14.А.Я.Симонов,Д.С.Бакаев,А.Г.Эпельман,А.А.Бесчинская и др.-“Система тренировочных задач и упражнений по математике”