**Методические рекомендации по решению**

**простейших иррациональных уравнений**

Учитель математики и информатики КГУ Каменской ОШ, ОО района Байтерек, УО акимата ЗКО

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель радикала - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение радикала также является неотрицательным ;

2) если показатель радикала - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак радикала совпадает со Знаком подкоренного выражения.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7$$

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат и произведем приведение подобных членов, перенос слагаемых из одной части равенства в другую и умножение обеих частей на $\frac{1}{2}$. В результате мы получим уравнение

$\sqrt{x+5}\sqrt{20-x}=12$ *(1)*

*являющееся следствием исходного. Снова возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение*

*(x+5)(20-x)=144*

*которое приводится к виду*

x2-15x+44=0

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни х1=4, x2= 11. Оба корня, как показывает проверка, удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: х1=4, x2= 11.

Пример: Решить уравнение

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4$$

Решение. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$2x+1+x-3+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=16$

откуда переносом слагаемых в другую часть равенства и приведением подобных членов получаем уравнение

$2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=3(6-x)$ (2) Снова возводим обе части получившегося уравнения в квадрат:

8x2-20x-12=324-108x+9x2

и после приведения подобных членов приходим к уравнению

x2-88x+336=0

Это уравнение является следствием исходного и имеет корни x1=4, x2=84.Корень x1=4 удовлетворяет исходному уравнению, а корень x2=84 является для исходного уравнения посторонним.

Ответ: x=4.

Замечание: При возведении уравнений в квадрат учащиеся нередко в уравнениях производят перемножение подкоренных выражений, т.е вместо этих уравнений пишут уравнения

$\sqrt{(x+5)(20-x)}=12$, (1’)

 $2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=3(6-x)$. (2’)

Это не приводит к ошибкам, поскольку уравнения (1'),(2') являются следствиями уравнений (1), (2).

Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае такое перемножение подкоренных выражений дает неравно- сильные уравнения. Это можно видеть на примере уравнений$\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}=2 и \sqrt{(x-1)(x-4)}=2 $: число x= 0 является корнем второго уравнения и не является корнем первого уравнения. Общий факт можно сформулировать следующим образом:

{$\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=a$} {$\sqrt{f(x)g(x)}=a$}

Здесь именно односторонняя стрелка (а не равносильность), т. е. обратный переход от уравнения$\sqrt{f(x)g(x)}=a$ к уравнению $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=a$ недопустим: он может привести к потере корней. Правильный переход осуществляется так:

{$\sqrt{f(x)g(x)}=a$} {$[\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=a$ ]V[$\sqrt{-f(x)}\sqrt{-g(x)}=a$]}

 В рассмотренных выше примерах можно было сначала перенести один из радикалов в правую часть уравнения. Тогда в левой части уравнения останется один радикал и после возведения обеих частей уравнения в квадрат в левой части уравнения получится рациональная функция. Такой прием (уединение радикала) довольно часто применяется при решении иррациональных уравнений.

 Пример . Решить уравнение

$$\sqrt{x^{2}+5x+2}-\sqrt{x^{2}-3x+3}=3$$

 Решение. Уединив первый радикал, получаем уравнение равносильное исходному

$\sqrt{x^{2}+5x+2}=\sqrt{x^{2}-3x+3}+3,$

 Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получаем уравнение

$$x^{2}+5x+2=9+x^{2}-3x+3+6\sqrt{x^{2}-3x+3}$$

*равносильное уравнению*

$$4x-5=3\sqrt{x^{2}-3x+3}$$

*Уравнение является следствием исходного уравнения. Возводя обе части уравнения в квадрат, приходим к уравнению*

*16x2-40x+25=9(x2-3x+3),*

*Или*

*7x2-13x-2=0*

*Это уравнение является следствием уравнения* $4x-5=3\sqrt{x^{2}-3x+3}$ *(а значит, и исходного уравнения) и имеет корни x1=2, x2=-*$\frac{ 1}{ 7}$ *.*

*Первый корень удовлетворяет исходному уравнению, а второй - не удовлетворяет.*

Ответ: x=2.

Заметим, что если бы мы сразу, не уединив один из радикалов, возводили обе части исходного уравнения в квадрат, то нам пришлось бы выполнять громоздкие преобразования.

При решении иррациональных уравнений, кроме метода уединения радикала, применяются, с учетом вида уравнения, и другие методы. Рассмотрим пример использования метода замены неизвестного при решении иррационального уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{12-2x}}=\frac{5}{2}$$

Решение. Положим

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=u$$

*Тогда уравнение примет вид*

$$u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2}$$

*откуда получаем следствие:*

*2u2-5u+2=0*

*Решая это квадратное уравнение, находим два корня : u1=2,u2=*$\frac{1}{2}$*.*

*Задача сводится теперь к решению следующих двух уравнений:*

$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=2$ *,*

$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=\frac{1}{2}$ *.*

*Возведя обе части уравнения* $\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=2$ *в куб, получаем*

$\frac{12-2x}{x-1}=8$*, откуда х1=2.*

*Аналогично, решив* $\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=\frac{1}{2}$ *,находим х2=*$\frac{97}{17}$ *.*

*Оба найденных корня удовлетворяют исходному уравнению, так как в процессе решения мы использовали (кроме замены неизвестного) только преобразования вида*

*[f(x)=g(x)] {[f(x)]3=[g(x)]3},*

*а при таком преобразовании, как было отмечено выше, получается равносильное уравнение.*

*Ответ: х1=2, х2=*$\frac{97}{17}$