**АНЫҚТАЛМАҒАН СЫЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ**

Исмаилова Ақмарал Рахманбердиевна - “Ж.Қаппаров атындағы №5 мамандандырылған физика-математикалық мектеп интернаты” КММ математика пәнінің мүғалімі

Теңдеу дегеніміз - бір немесе бірнеше шамалар белгісіз болатын математикалық теңдік. Белгісіздердің мәнін оларды бастапқы теңдеуге ауыстырған кезде дұрыс сандық теңдік болатындай етіп табу керек.Теңдеуді, мысалы, мәні табылуы керек белгісіз x айнымалысы бар 3 + x = 7 теңдігі деп атауға болады. Нәтиже теңдік белгісі ақталып, сол жағы оңға тең болатындай болуы керек.

Теңдеулер жүйесі-бұл белгісіз мәндерді табу керек бірнеше теңдеулер, олардың әрқайсысы берілген теңдеулерге сәйкес келеді.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу

аx + by + с = 0 түрінің теңдеуі екі х және y айнымалысы бар сызықтық теңдеу деп аталады, мұндағы a, b, c - сандар. Бұл теңдеудің шешімі осы теңдеуге сәйкес келетін және оны нақты сандық теңдікке айналдыратын кез-келген сандар жұбы (x; y) деп аталады.

Теорема: егер сызықтық теңдеудегі айнымалыда кем дегенде бір нөлдік коэффициент болса - оның графигі түзу болады.

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесі x және y бір емес, екі теңдеумен байланысқан жағдайда жасалады. Мұндай жүйенің бір шешімі болуы мүмкін немесе мүлдем шешімдері болмауы мүмкін.

Сызықтық теңдеулер әртүрлі көрінуі мүмкін. Бірақ олардың барлығы қарапайым түрлендірулер арқылы түрлендіріледі.

Қарапайым деп аталатын түрлендірулердің үш түрі бар:

1.Теңдеудің екі бөлігіне бірдей өрнек қосыңыз.

2.Теңдеудің екі бөлігін де нөлден басқа бірдей өрнекке көбейтіңіз.

3.Тең белгінің сол және оң жағындағы өрнектерді ауыстырыңыз.

Екі және одан да көп айнымалылары бар теңдеулерді анықталмаған теңдеулер деп атайды. Анықталмаған сызықтық теңдеулердің шешімі деп осы теңдеуді қанағаттандыратын айнымалылар мәндерінің барлық жиынын айтады. Біз мұнда анықталмаған сызықтық теңдеулердің бүтін сандар жиынындағы шешімдерін Евклид алгоритмі арқылы қарастырамыз.

Егер a, b, c – бүтін сандар болса, онда ax+by=ссызықтық теңдеуін бүтін сандар жиынында шешу тәсілдерін қарастырамыз.

Егер (a, b)=d болса,онда ax+by=d теңдеуінің бүтін шешімдері бар.

Д ә л е л д е у і . Жеңілдік үшін (a, b)=dсанын анықтауға арналған Евклид алгоритмі 3 қадамнан соң аяқталсын делік. Онда a=bq1+r1,b=r1q2+r2=r1q2+d, r1=bq3 теңдігін аламыз.Осыдан r1=a-bq1, d=b-r1q2теңдігінен r1–ді бөліп шығара отырып, d=b-(a-bq1)q2=-q2a+(1+q1q2)b теңдігін аламыз. Сонда

x=-q2, y=1+q1q2 сандары ax+by=d теңдеуін қанағаттандыратынын көреміз. Жалпы жағдайда теорема осы сияқты дәлелденеді.

1-мысал. 15x +37y=1 теңдеуінің бүтін шешімдерін табу керек.

Шешуі.1 санын 15 пен 37 сандары арқылы жіктеу керек:1=15$∙$5+37$∙$(-2)x=5, y=-2.

Евклид алгоритмін қолдана отырып, 37=15$∙$2+7, 15=2$∙$7+1 теңдігін аламыз. Осыдан 1=15-2$∙$7=15-2$∙$(37-15$∙$2)=15$∙$5+(-2)37. Онда x=5, y=-2.

2-мысал. 407x-2816y=33 теңдеуінің бүтін шешімдерін табу керек.

Шешуі. (407, 2816)=11 болғандықтан, берілген теңдеу 11-ге қысқартқаннан кейін 37x-256y=1 теңдеуінің бір пар бүтін шешімін анықтау керек.

Евклид алгоритмін қолдана отырып, ((37,256)=1) 256=37$∙$6+34, 37=1$∙$34+3, 34=33$∙$1+1 теңдігін аламыз. Онда 1=34-3$∙$11=34-11$∙$(37-34)=256-37$∙$6-11(37-256+37$∙$6)=12$∙$256-83$∙$37=(-83)$ ∙$37-(-12)$ ∙$256. Осыдан x0=-83, y0=-12 болатындығы шығады. Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі x=-83-3

-256t=249-256t, y=-12$∙$3-37t=36-37t.

$\left\{\begin{array}{c}x=7-256t\\y=1-37t\end{array}\right.$жүйесімен анықталады.Бұл жүйеде х,у$\in $N. Анықталу облысын табамыз.

$\left\{\begin{array}{c}7-256t\geq 0\\1-37t\geq 0\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}7\geq 256t\\1\geq 37t\end{array}\right.$t$\in \left[-\infty ;1/37\right]$

Егер t=-1 деп алсақ, онда x1=7, y1=1 болатындай берілген тендеудің бір пар шешімін аламыз. Онда салдар бойынша берілген теңдеудің жалпы шешімі дұрыс шықты.

Жауабы:t∈[-∞;1/37] аралығында теңдеудің шексіз көп шешімі бар.

Анықталмаған сызықтық теңдеулерді қолдану.

3-мысал Жүк жеткізу орталығында 3,5 және 4,5 тонналық көліктері бар. Компания 53 тонналық жүкке тапсырыс алды. Тапсырысты қанша жүк көлігімен және бір рейспен алып барады. Ескерту: Әр көлік толып баруы керек.

Шешуі; Берілген 3,5 және 4,5 тонналық көліктерді сәйкесінше-х,у айнымалысымен өрнектеп алайық.

Есепті шешу үшін теңдеу құрастырып алайық.

3,5х+4,5у=53 теңдеуін Евклид алгоритмін пайдаланып шешеміз. Ол үшін теңдеуді бірге теңестіріп аламыз. 3,5х+4,5у=1

4,5=1$∙$3,5+1 1=1$∙$4,5-1$∙$3,5 өрнегі 1=4,5у+3,5х теңдеуінің $х\_{0}$=-1,$у\_{0}$=1 мәндері шығады.

$\left\{\begin{array}{c}Х= 53+4,5t\\У=53-3,5 t \end{array}\right.$ жүйесі шықты. Бұл жүйеде х,у$\in $N. Анықталу облысын табамыз.

$\left\{\begin{array}{c}-53+4,5t\geq 0\\53-3,5 t\geq 0\end{array}\right.$ → $\left\{\begin{array}{c}3,5t\geq 53\\4,5 t \geq -53 \end{array}\right.tϵ\left⌊12;15\right⌋$

Енді t-ның орнына мәндерін қойып тексереміз. t=12 мәнінде х=1.у=11.

3,5$∙$1+4,5$∙$11=53 шықты. Демек есебіміз дұрыс шықты.

Жауабы.tЄ$\left[12;15\right]$ мәнінде есептін бірнеше жауабы бар.

4-мысал Шехризада ұлы сұлтанға 1001 ертегі айтып беруі керек.Егер ол х түнде 3 ертегіден у түнде 5 ертегіден айтатын болса, онда Шехризадаға 1001 ертегіні айтып бітіруі үшін неше түн қажет?

Шешуі.

3х+5у=1001 теңдеуін құрып аламыз.

Евклид алгоритмібойынша 3х+5у=1 теңдеуіне келтіреміз.

1=2$∙$3-1$∙$5 х0=2 у0=1$\rightarrow $

$\left\{\begin{array}{c}х=2002-5t\\y=-1001+3t\end{array}\right.$жүйесі шығады.х,у$ϵ$Nболғандықтан $\left\{\begin{array}{c}2002-5t\geq 0\\-1001+3t\geq 0\end{array}\right.\rightarrow $

t$ϵ$[333,400] мәнін қабылдайды. Тексеріп көру үшін t=400 мәнін қоямыз.

x=2 y=199. 3$∙$2+5$∙$199=1001 .Демек Шехризада 2 түн үш ертегіден 199 түн 5 ертегіден оқуы керек.

Жауабы:t ϵ[333;400]аралығында есептің шешімі бар.

 5-мысал Нұрғиса досымен мейрамханаға барды.Олар 23 долларлық тағамға тапсырыс берді.Егер Нұрғисада 2 және 5 долларлық ақша болса , ол даяшыға қанша 2және 5 долларлық беруі керек.

Шешуі.

2х+5у=23 теңдеуін құрамыз.

Евклид алгоритмі бойынша 2х+5у=1 теңдеуіне келтіреміз.

1=1$∙$5-2$∙$2 х0=-2 у0=1→

$\left\{\begin{array}{c}x=-46+5t\\y=23-2t\end{array}\right.$жүйесі шығады.х,у ϵ N болғандықтан$\left\{\begin{array}{c}-46+5t\geq 0\\23-2t\geq 0\end{array}\right.\rightarrow $

tϵ[9;11] мәнін қабылдайды. Тексеріп көру үшін t=10 мәнін қоямыз.

x=4 y=3.2$∙$4+3$∙$5=23 Демек Нұрғисаға 4 екі долларлық 3бес долларлық керек.

Жауабы:t ϵ[9;11] аралығында Нұрғисада көптеген таңдау бар.

6-мысал Бекзат жазда даяшы болып жұмыс істеді.Оған сағатына 10 рубль төлейді,ал әр сынған тәрелке үшін Бекзаттан 2 рубль алады.Өткен аптада Бекзат жұмыс бухгалтерінен 180 рубль ақша алады.Ол қанша сағат жұмыс жасады және қанша тәрелке сындырды.

Шешуі:

Ол х сағат жұмыс істесін, бірақ ол у тәрелке сындырсын. Олай болса

10х-2у=180

5х-у=90 теңдеуі шығады. Евклид алгоритмі бойынша 5х-у=1 теңестіріп аламыз.

1=1$∙$5-4$∙$1→х0=1 y0=4→

$\left\{\begin{array}{c}X=90-t\\y=360-5t\end{array}\right.$жүйесі шығады. х,у ϵN болғандықтан $\left\{\begin{array}{c}90-t\geq 0\\360-5t\geq 0\end{array}\right.$→

t ϵ[-∞;72] мәнін қабылдайды. Тексеріп көру үшін t=72 мәнін қоямыз,себебі бізге Бекзат ең аз мүмкін болатын сағаты мен сындырған тәрелкесі керек.

х$=$18 ,у$=$0. 18$∙$5+1$∙$0=90 шығады. Егер Бекзат ешқандай тәрелке сындырмаса, бухгалтер Бекзатқа 180 рубль береді.

Жауабы. t ϵ[-∞;72] аралығында Бекзаттың ақшаны түрлі сағатта таба алады.

7-мысал Автокөлік жолдың белгілі-бір бөлігін 15км/сағ жылдамдықпен,алжолдың қалған бөлігін 10км/сағ жүрді. Жолдың жалпы ұзындығы 25кмболса, автомобиль жолдың әр бөлігін қанша уақыттан жүріп өтті.

Шешуі. Бұл секілді есептер физика пәнінде жиі кездеседі,бірақ ол есептерде уақыттарының қосындысы берілетін болғандықтан, есепті шығару оңай болатын. Бұл есепте уақыттарының қосындысы жоқ, сондықтан есепті Евклид алгоритмін пайдаланып шығарамыз. T1=x ,T2=y деп алып

15х+10у=25

3х+2у=5 теңдеуі шығады. Теңдеуді алгоритм бойынша 4х+3у=1 теңестіріп аламыз.

1=1$∙$3-1$∙$2$\rightarrow $х0=1, у0=-1 $\rightarrow $

$$\left\{\begin{array}{c}х=5+2t\\у=-5-3t\end{array}\right.\rightarrow жүйесі шығады. х,у ϵN болғандықтан\left\{\begin{array}{c}5+2t\geq 0\\-5-3t\geq 0\end{array}\right.\rightarrow $$

t ϵ[-2,5;-1,6] мәнін қабылдайды. Тексеріп көру үшін t=-2 мәнін қоямыз

х=1,у=1 1$∙$3+1$∙$2=5 шығады. Демек есептің көптеген жауабы бар.

Жауабы. t ϵ[-2,5;-1,6] аралығында есептің көптеген жауабы.

8-мысал Ертеректе бір топ қарақшылар алтын тиелген керуенді шабады. Керуенде бар болғаны 24 дана алтын бар екен. Алтынды қарақшылар бөлісуді бастады. Олардың басшысы 16 алтын, қарапайым қарақшылар 6 алтыннан аламыз деді. Олар алтынды қалай бөледі?

Шешуі. Басшыны х, қарақшыларды у деп белгілеп аламыз. Жалпы алтын 24 болғандықтан, 16х+6у=24 түріндегі теңдеу шығады. Екіге қысқарып кеткеннен соң 8х+3у=12 шықты. Теңдеуді Евклид алгоритмі бойынша бірге теңестіріп аламыз.

8х+3у=1

-1$∙$8+3$∙$3=1$\rightarrow $ х0=-1, у0=3 болады.

$\left\{\begin{array}{c}х=-12+3t\\у=36-8t\end{array}\right.\rightarrow $жүйесінде х,у$ϵ$N, сондықтан $\left\{\begin{array}{c}-12+3t\geq 0\\36-8t\geq 0\end{array}\right.\rightarrow $

t ϵ[4,4,5] болады, алайда х,у бүтін болғандықтан, t=4 мәнін ғана қабылдайды. Орнына қойып көрсек х=0,y=4 шығады. Демек 4 қарақшы басшыларын өлтіріп, өздері алтынды бөліп алған.

Жауабы. Төрт қарақшы алтынды бөлісіп алды.

Жалпы айтқанда оқу үрдісінде бүтін сандар жиынында теңдеулерді шығарудың әдіс–тәсілдерін пайдалану, оларды терең зерттеу сабақтың сапасын арттырады.

Сондай –ақ оқушылардың белсенділігі мен ой-өрісін дамытуға септігін тигізеді және олардың пәнге, техникалық ғылымға деген қызығушылығын арттырады. Ең негізісі оқушылар бағдарламадан тыс мағлұматтар алып, білім сапасын арттырады.

 Қазіргі таңда жоғары білім беру үздіксіз білім алуға дайын, өзінің сана сезімін жан–жақты жетілдіріп, кәсіби қорын толықтыруға қабілетті, қоғам дамуындағы нарықтық қатынастың құбылмалы саясатына тез бейімделетін шығармашыл, еңбекқор жастарды тәрбиелеп, білімді де білікті мамандар дайындауды мақсат тұтады. Сол себепті, жастардың білім алуы үшін барлық жағдай жасалған және дүниежүзілік олимпиадаларға шығуға жол ашық. Соңғы кезде математикалық олимпиадаларға, ғылыми жобаларды қорғауға көп көңіл бөлінуде. Сонымен қатар қазіргі мектеп математикасындағы оқыту үрдісінің нәтижесін жоғарылату бағытында оқушылардың алған білімдерін практикада өздігімен орындауға үйрету керек.

 Ал мектеп бағдарламасында олимпиадалық есептерді шығару тәсілдері өте аз. Бұл сайыстарда көп кездесетін есептердің бір тобы – бүтін сандар жиынында шешілетін теңдеулер. Бұл еңбекте осындай теңдеулерді шешудің жалпы теориясын, әдіс–тәсілдері ашып көрсетілді.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Тердікбай Күшай. Математика пәнінің таңдау курстары. Оқу әдістемелік құрал. – Астана: Дарын, 2009.
2. Бейсеков Н. 9-сыныптағы оқушыларды математикалық олимпиадаға даярлау. – Шымкент. 2012ж.
3. Шыныбеков Ә. Н. Алгебра: Жалпы білім беретін мектептің 8 – сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Атамұра, 2004.
4. Асқарова А. Теңдеулер, теңсіздіктер және олардың системалары. – Алматы: Рауан, 1992.
5. Олехник С. Н. И др. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. – М.: МГУ, 1991.
6. ҚалиевС.Республикалық математика олимпиадалары есептерінің жинағы. – Алматы: Мектеп, 1982.