

## Қозғалыс уақыты ең аз болатын траекторияны табу есебі

Хужахметов Жамшид Жангабайұлы<sup>1</sup>, Баян Темірлан Ерланұлы<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> «Алматы облысы білім басқармасының Еңбекшіқазақ ауданы бойынша білім бөлімі» мемлекеттік мекемесінің «И. Шорманов атындағы орта мектеп» КММ

<sup>1</sup> [qjhmtv@gmail.com](mailto:qjhmtv@gmail.com),

<https://orcid.org/0009-0006-6495-514X>

### Кіріспе

Қозғалыс уақыты ең аз болатын траекторияны табу есебін басқаша брахистохрона есебі деп атайды. Брахистохрона есебі деп екі нүктенің арасындағы ең аз уақыт ішінде жүріп өтуді қамтамасыз ететін траекторияны табу мәселесін айтамыз. Яғни, біркелкі ауырлық өрісінде А нүктесінен В нүктесіне дейін үйкеліссіз сырғанайтын дене үшін түсудің ең қысқа уақыты қажет траекторияны анықтау керек. «Брахистохрона» термині грек тіліндегі «βράχιστος» – «ең қысқа» және «χρόνος» – «уақыт» сөздерінен шыққан, мағынасы – «ең қысқа уақыт». Бұл классикалық есепті 1696 жылы Исаак Ньютон, Якоб және Иоганн Бернулли шешкен. Олардың шешімі қисықтар арасында ең аз уақыт жұмсалып өту траекториясының түзу сызық еместігін, арнайы қисық сызық екендігін көрсеткен.

Физикалық тұрғыдан түсіндіретін болсақ, В нүктесі горизонталь бағытта белгілі бір қашықтыққа ығысқан және А нүктесінен төмен орналасқан жағдайда, бөлшекті тік төмен түсірсек, ол бастапқыда үлкен жылдамдық алады, бірақ горизонталь бағытта орын ауыстыруы болмайды; ал бөлшекке түзу көлбеу жол берсек, горизонталь жылжу бар, алайда қозғалыс басында жылдамдығы аз болады. Брахистохрона қисығы осы екі факторды оңтайландыру арқылы түсудің ең аз уақытын қамтамасыз етеді. Нәтижесінде, А нүктесінен В нүктесіне жетудің ең жылдам траекториясы – түзу де, парабола да емес, ерекше қисық сызық, яғни циклоида екендігі белгілі болады.

Бұл тарихи есеп calculus of variations–тің (вариациялық есептеудің) пайда болуына негіз болып, ғылымда маңызды із қалдырды. Сондықтан брахистохрона есебін талдау және түрлі жағдайларда шешу әдістерін қарастыру өзекті болып табылады.

Осы ғылыми жұмыста алдымен брахистохрона есебінің физикалық негізі мен классикалық шешімі жан-жақты қарастырылды. Ньютонның екінші заңы мен энергияның сақталу заңы негізінде қозғалыс теңдеулері алынды, әрі осы арқылы дененің циклоида бойымен ең аз уақытта қозғалу траекториясы аналитикалық түрде дәлелденді.

Жалпы алғанда, бұл ғылыми жұмыс тек классикалық брахистохрона есебінің шешу жолдарын сипаттап қана қоймай, оны кеңейтілген және нақты физикалық жағдайларда зерттеу арқылы мәселені жаңа қырынан қарастыруға жол ашады. Алынған нәтижелер механика мен физика саласындағы нақты қолданбалы есептерді шешуде, сондай-ақ экстремумдық принциптерге негізделген жүйелерді модельдеуде маңызды рөл атқара алады.

# 1 БРАХИСТОХРОНА ЕСЕБІНІҢ КЛАССИКАЛЫҚ ҚОЙЫЛЫМЫ ЖӘНЕ ШЕШУ ЖОЛДАРЫ

## 1.1 Есептің физикалық мағынасы

Брахистохрона есебі деп екі нүктенің ( $A$  және  $B$ ) арасындағы ең аз уақыт ішінде өтуге мүмкіндік беретін траекторияны табу мәселесін айтады. Яғни, ауырлық күші әрекет ететін біркелкі гравитациялық өрісте орналасқан,  $A$  нүктесінен бастап  $B$  нүктесіне дейін үйкеліссіз сырғанайтын материалдық бөлшек үшін ең жылдам түсетін жолды анықтау керек. “Брахистохрона” атауы грекше «*βράχιστος*» – қысқа және «*χρόνος*» – уақыт сөздерінен шыққан, мағынасы – “ең қысқа уақыт”. Бұл классикалық есепті 1696 жылы Исаак Ньютон, Якоб және Иоганн Бернулли сынды ғалымдар шешкен, және оның шешімі қисықтардың арасында ең аз уақыт жұмсалатын траекторияның түзу сызық емес екенін көрсетеді.

Физикалық тұрғыда, егер  $B$  нүктесі горизонталь бағытта  $A$ -дан ығысқан және төмен орналасқан болса, интуитивті түрде ойласақ, бөлшек тіке төмен (тек  $y$  бойымен) түссе, бастапқыда үлкен жылдамдық алады, бірақ горизонталь жылжу жоқ; ал түзу көлбеу сызықпен жүрсе, жолы қысқарақ болады, бірақ бастапқы жылдамдығы аз болады. Брахистохрона қисығы осы екі факторды оңтайландырып, ең жылдам түсу уақытын қамтамасыз етеді. Нәтижесінде,  $B$  нүктесіне жетудің ең шапшаң траекториясы түзу де, парабола да емес, ерекше бір қисық – циклоида болып табылады.

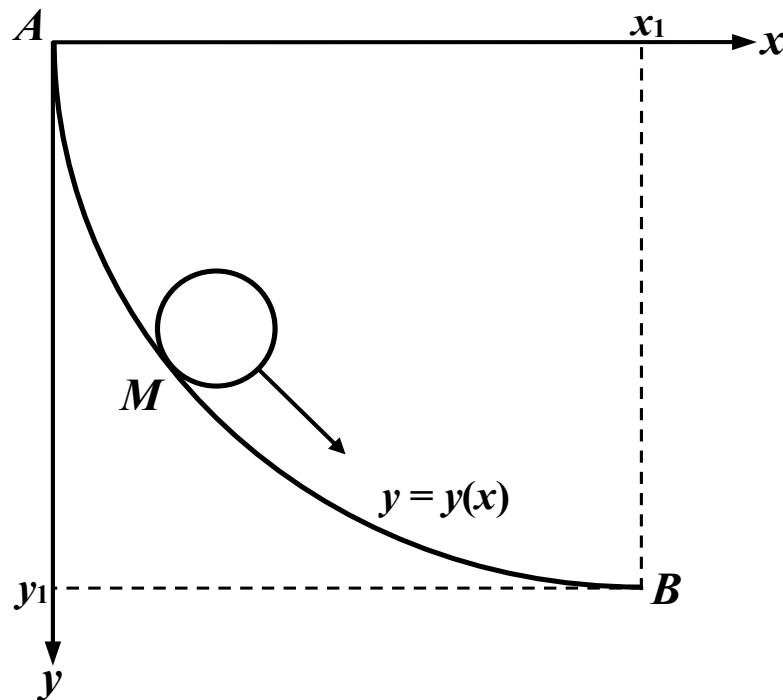
## 1.2 Координат жүйесін таңдау

Жер бетіне перпендикуляр бір түзудің бойында орналаспайтын  $A$  және  $B$  нүктелері тік жазықтықта берілсін. Осы екі нүктені қосатын және сол бойынша дене өз салмағының әсерімен бір нүктеден екіншісіне ең аз уақыт ішінде жететін қисық сызықты табу керек. Үйкеліс күші мен ауаның кедергісі ескерілмейді. Бастапқы уақыт мезетінде дене тыныштық күйінде, яғни оның жылдамдығы нөлге тең деп қабылданады.

Есепті талдау үшін координат жүйесін ыңғайлы етіп таңдап аламыз.  $A$  бастапқы нүктесін координат басы  $O(0,0)$  деп алайық. Горизонталь бағытты  $OX$  осімен, ал вертикаль төмен бағытты  $OY$  осімен бағыттаймыз (сурет 1 қараңыз). Сонда ауырлық күшінің үдеуі  $g$  шамамен  $OY$  өсінің бойымен төмен бағытталған тұрақты вектор болады (біркелкі ауырлық өрісі).  $B$  нүктесінің координаттарын деп белгілейміз, мұнда  $x_1$  –  $A$ -дан  $B$ -ға дейінгі горизонталь қашықтық, ал  $y_1$  –  $A$ -дан  $B$ -ның вертикаль төмен ығысуы (яғни биіктігінің айырмасы). Осылайша, ізделетін  $y = y(x)$  функциясы сәйкесінше  $A$  және  $B$  нүктелерінде мына шарттарды қанағаттандыруы тиіс:

$$y = 0, \quad y(x_1) = y_1 > 0 \quad (1)$$

және дененің  $A$  нүктесінен  $B$  нүктесіне дейінгі жолды ең аз уақыт ішінде өтуін қамтамасыз етуі керек. Есептің шарты бойынша  $B$  нүктесі  $A$ -ның дәл астында емес, яғни  $x_1 \neq 0$ . Ізделінді траекторияны  $y = y(x)$  деп белгіленетін кейбір қисық сызық түрінде қарастырамыз. Бұл қисық  $A(0,0)$  және  $B(x_1, y_1)$  нүктелерін қосуы қажет.



**Сурет 1.** Брахистохрона есебінде дененің қозғалысы

Осындай координат таңдағаннан кейін, ауырлық күшінің ықпалы тек вертикаль ( $y$ ) координатада көрінеді. Массасы  $m$  материалдық нүкте  $A$ -дан бастап осы қисық бойымен сырғанағанда, бастапқы кинетикалық энергиясы нөл (дене initially тыныштықта), ал потенциалдық энергиясы  $mg y$  мәніне азаяды ( $y$  өскен сайын биіктік төмендейді). Бізге уақытты есептеу үшін жолдың геометриялық қасиеттерін және жылдамдықтың  $y$ -қа тәуелділігін табу керек.

### 1.3 Қозғалыс теңдеуін шығару (Ньютон заңы және энергия)

Бөлшек қисық бойымен қозғалғанда оған тек ауырлық күші ( $mg$ ) әсер етеді. Оның бұл күш бойындағы қозғалуын қарастыру үшін Ньютонның екінші заңын және энергия сақталу принципін пайдаланамыз. Қисықтың кез келген нүктесінде жанама бойымен қозғалыс бағытын алайық; ауырлық күшінің траектория бойындағы проекциясы  $mg \sin \theta$  болады, мұнда  $\theta$  – траекторияның осы нүктедегі жанама бағыты мен горизонталь осьтің арасындағы бұрыш. Ньютонның екінші заңы бойынша, бөлшектің жанама бойындағы үдеуі  $a_t$  мынаған тең:  $ma_t = mg \sin \theta$ . Осыдан қозғалыс теңдеуі түзіледі:

Траектория бойындағы күш проекциясы

$$ma_t = mg \sin \theta.$$

Үдеуді

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

деп алсақ (мұндағы  $v$  – траектория бойындағы жылдамдық), масса  $m$  қысқарып, теңдеу

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \theta. \quad (2)$$

$\theta$  бұрышы горизонтальға қатысты еңкею бұрышы, сондықтан  $\sin \theta$  жанама сегменттің тік проекциясының ұзындық қатынасын көрсетеді (шағын доға элементінде  $ds$  ұзындықтың тік құраушысы  $dy$  болады, яғни

$$\sin \theta = \frac{dy}{ds}. \quad (3)$$

Жылдамдық

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$$

екенін біле отырып, шынжырлық дифференциалдау ережесі қолданылдып бізге (2) теңдеуде қажет болған  $\frac{dv}{dt}$  келесідей өрнектей аламыз

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}. \quad (4)$$

Мұндағы  $s$  -  $M$  нүктесінен бастап координата басы  $A$  нүктесіне дейінгі осы қисықтың доға ұзындығы. (2) теңдеуіне жоғарыдағы (3) және (4) байланыстарды қойсақ

$$v \frac{dv}{ds} = g \frac{dy}{ds},$$

$$v dv = g dy$$

қатынасы шығады. Алынған өрнекті интегралдап,

$$\frac{v^2}{2} = gy + C,$$

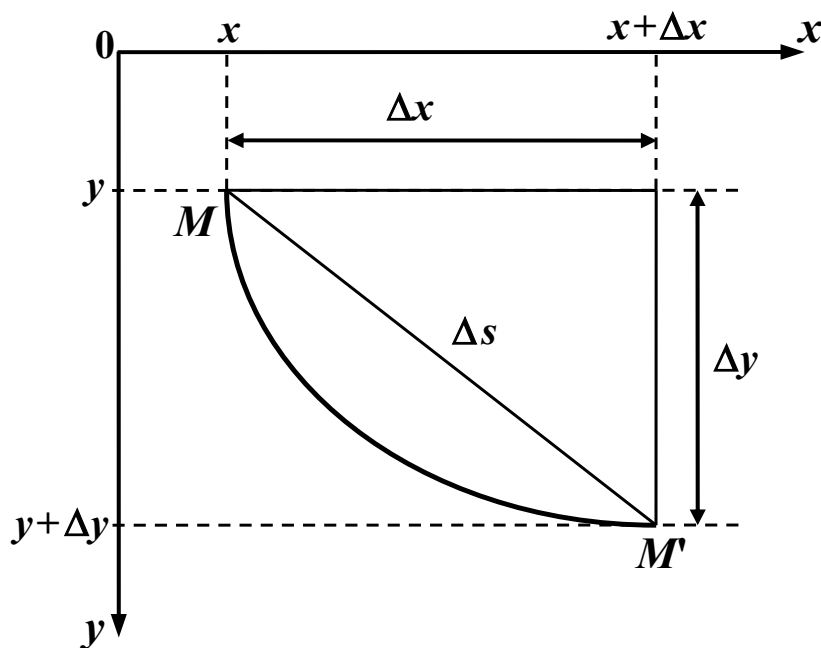
теңдеуін аламыз, мұнда  $C$  – еркін тұрақты. Бастапқы шарт (1)  $y = 0$  болғанда (яғни  $A$  нүктесінде) дене тыныштықта екенін ескеріп,  $C = 0$  деп аламыз. Сонда вертикаль координатасы  $y$  у кезіндегі құлап жатқан дененің жылдамдығы

$$v = \sqrt{2gy} \quad (5)$$

Демек, бөлшек қисық бойымен  $y$  төмендеген сайын жылдамдығы (5) заңдылығымен артады (ауырлық әсерінен үдейді). Бұл формула қозғалыстың **траекториядан тәуелсіз** жалпыланған қасиеті: тек вертикаль түсудің биіктігіне байланысты (үйкеліс жоқ жағдайда). Енді траектория пішіні уақытқа қалай әсер ететінін анықтау үшін жол ұзындығын және жалпы уақытты өрнектейміз.

#### 1.4 Доғалық элементтің ұзындығын анықтау

Қисық бойымен  $A$ -дан  $B$ -ға дейінгі қозғалыс жолының ұзындығы бөліктеп суммаланады. Координаттар жүйесінде  $y = y(x)$  қисығы берілген. Дененің жүрген жолы, демек оны жүріп өтуге кеткен уақыт  $y = y(x)$  функциясына тәуелді.  $t$  уақыт мезетінде координаттары  $(x, y)$  болатын  $M$  нүктесінде тұрған дене қарастырылып отырған қисық бойымен өте аз  $\Delta t$  уақыт ішінде координаттары  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  болатын  $M'$  нүктесіне жылжыды деп есептейік (сурет 2 қараңыз).



Сурет 2. Доғаның ұзындығын есептеу

$\Delta t$  уақыт аралығы өте аз болған жағдайда  $M$  мен  $M'$  нүктелерін қосатын доғаның ұзындығы  $MM'$  кесіндісінің ұзындығына өте жуық болады; бұл ұзындық

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} \Delta x.$$

$\Delta t$  нөлге ұмтылғанда  $M'$  нүктесі  $M$ -ге жақындайды, және дифференциалдық түрде, доғаның элементі дәл ұзындығы

$$ds = \sqrt{(1 + y'(x)^2)} dx, \quad (6)$$

мұндағы  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Бұл формула кез келген жазықтықтағы қисық сызықтың шағын доғасының ұзындығын береді. Енді толық жолдың уақытын табу үшін жылдамдық пен жол ұзындығының элементтерін байланыстырамыз.

### 1.5 Уақытты есептеу формуласы

Бөлшектің қисық бойымен қозғалу уақыты жолдың әрбір шағын бөлігіне жұмсалған уақыттарды қосу арқылы табылады. Доғаның  $ds$  элементін жүріп өтуге кететін уақыттың шағын өсімі  $dt$  мынаған тең

$$dt = \frac{ds}{v}. \quad (7)$$

Алынған өрнек қозғалып жатқан дененің горизонталь координатасы  $x$  пен уақыт  $t$  арасындағы байланысты көрсетеді.  $t = 0$  кезінде (яғни бастапқы сәтте)  $A$  нүктесінде тұрған дененің  $x$  координатасы 0-ге тең. Белгілі бір соңғы уақыт моментінде  $T$  ол горизонталь координатасы  $x_1$  болатын  $B$  нүктесіне жетеді (сурет 1 қараңыз). Онда (7) теңдігін интегралдау нәтижесінде мынаны аламыз

$$\int_0^T dt = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (8)$$

Осылайша, егер (1) шарттарын қанағаттандыратын  $y = y(x)$  қисығы берілген болса, онда оның бойымен өз салмағының әсерімен қозғалған дене  $A$  нүктесінен  $B$  нүктесіне дейінгі жолды мына уақыт ішінде өтеді

$$T = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} dx. \quad (9)$$

Мұнда жоғарыда тапқан (5) және (6) өрнектерді (8) теңдеудегі  $v$  және  $ds$  қойдық. Сөйтіп, брахистохрона есебі (1) шартын қанағаттандыратын функциялар

жиынында  $T$  функционалын минимизациялау есебіне келтіріледі. Алынған есеп вариациялық есептеудің типтік мысалы болып табылады.

## 1.6 Вариациялық есеп ретінде қорытындылау

Осындай түрде, мәселе вариациялық есепке айналды:  $T[y]$  функционалын экстремумға келтіретін  $y(x)$  функциясын табу керек. Мұны есептеудің классикалық әдісі – Эйлер-Лагранж теңдеуін құру. Біздің жағдайда функционалдың интеграл астындағы функциясы:

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}},$$

мұнда  $F$  айнымалы  $x$ -қа тәуелді емес (яғни интеграланд  $x$ -қа анық түрде кірмейді). Эйлер-Лагранж теңдеуі жалпы түрде:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

Бұл теңдеуді біздің  $F$  үшін жазып, қарапайым дифференциалдық теңдеуге келтіруге болады.  $x$  кірмегендіктен, есепті жеңілдететін Бельтрами интегралы қолдануға болады

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const}.$$

Осы тәсілмен қарастырғанда, шешімі мынадай өрнекке келіп тіреледі:

$$[1 + (y')^2]y = \text{const} = k^2.$$

Бұл теңдеу  $y$  және оның туындысы  $y'$  арасындағы байланысты көрсетеді. Оны шешу үшін бөлшекке параметрлік форма береміз. Мысалы, жаңа  $\theta$  параметрін енгізіп,  $y$ -ті тригонометриялық функция арқылы өрнектеу тиімді. Шешімі циклоида теңдеулеріне ұқсас болатындығын көруге болады. Нақтырақ айтқанда, жалпы шешім параметрлік түрде:

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{k^2}{2} (\theta - \sin\theta), \\ y(\theta) = \frac{k^2}{2} (1 - \cos\theta). \end{cases}$$

Мұндағы  $k$  – жоғарыдағы тұрақтының квадрат түбірі (масштабтық параметр). Бұл теңдеулер жазықтықтағы циклоида қисығының параметрлік теңдеулері болып табылады. Циклоида – дөңгелектің шеңбер бойындағы бір нүктесінің домалау траекториясы, дәл осы қисық А және В нүктелерін қосқанда, бөлшек ең аз уақытта төмен домалайды.

Осылайша, вариациялық есептің шешімі көрсеткендей, брахистохрона қисығы – циклоида бөлігі болып шықты. Циклоида қажетті бастапқы және соңғы нүктелер арқылы өтетіндей етіп параметрлерін (мысалы,  $k$  немесе  $\theta$  диапазонын) таңдауға болады. Ең басты нәтиже: **екі нүкте арасында ауырлық күші әсерінен ең аз уақытта сырғанайтын траектория циклоидалық қисық болады.** Бұл қорытындыны алғаш рет И. Бернулли және басқа ғалымдар алған, және ол есеп математикалық вариациялық тәсілдердің дамуына түрткі болды.

Брахистохрона есебінің толық шешу жолын қорыта келгенде, алдымен есептің физикалық мәні түсіндірілді, содан соң ыңғайлы координат жүйесі енгізіліп, Ньютонның екінші заңы мен энергия сақталуы арқылы жылдамдық пен биіктік қатынасы (5) табылды. Доға элементінің формуласы (6) көмегімен қозғалыс уақытының интегралдық функционалы өрнектеліп, вариациялық қағидат бойынша оны экстремумға жеткізетін функция циклоида екені анықталды. Бұл шешім практикалық тұрғыда да тексерілген – циклоида бойымен шарик түзу сызыққа қарағанда тезірек домалайтыны тәжірибелерде көрсетілген. Осылайша, брахистохрона есебінің шешімі бізге табиғаттағы экстремаль құбылыстарды түсінуге көмектесетін классикалық үлгі болып табылады.

## 2 ЦИКЛОИДА МЕН ТҮЗУ СЫЗЫҚ БОЙЫНША ҚОЗҒАЛЫС УАҚЫТТАРЫН САЛЫСТЫРУ

### 2.1 Циклойда бойынша қозғалыс уақыты

Алдыңғы тарауда екі нүкте арасында ауырлық күші әсерінен ең уақытта сырғанайтын траектория циклоидальық қисық болатынын және

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta), & 0 < x < x_1 \\ y = R(1 - \cos\theta), & 0 < y < y_1' \end{cases}$$

параметрлік түрде берілетінін анықтадық.

Циклойда бойымен толық доға жүрілсе ( $\theta = \pi$ ), онда:

$$y_1 = R(1 - \cos\pi) = R(1 - (-1)) = 2R, \quad x_1 = R(\pi - \sin\pi) = \pi R$$

Кез келген траектория бойынша қозғалыс уақыты

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

екені белгілі. Мұнда  $ds$  жол ұзындығының дифференциалы:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = R\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta \\ &= R\sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta = R\sqrt{2(1 - \cos\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

ал жылдамдығы:

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}.$$

сонда жалпы уақыт:

$$T = \int_0^{\theta_1} \frac{R\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{\sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}} d\theta = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{R}{g}} d\theta = \theta_1 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Толық доға үшін уақыт. Циклойда доғасының толық бір период үшін  $\theta_1 = \pi$ , сондықтан:

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Егер  $y_1$  циклойданың биіктігі болса, онда

$$y_1 = 2R, \quad R = \frac{y_1}{2}.$$

сонда

$$T_{\text{циклойда}} = \pi \sqrt{\frac{y_1}{2g}}.$$

## 2.2 Түзу траектория бойынша қозғалыс уақыты.

Дене  $A$ -дан  $B$ -ға дейін түзумен қозғалады. Бұл траекторияның ұзындығы

$$S = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Соңғы жылдамдығы (энергияның сақталу заңы бойынша)

$$v = \sqrt{2gy_1}$$

Түзу сызық үдемелі қозғалыс болып саналады, сондықтан орташа жылдамдық келесідей түрде болады

$$v_{\text{орт}} = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gy_1}}{2}.$$

Сонда түзу траекториясы бойынша қозғалыс уақыты:

$$T = \frac{S}{v_{\text{орт}}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2gy_1}},$$

$$T_{\text{түзу}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}}.$$

## 2.3 Уақыттың қатынасын салыстыру.

Мақсат:  $T_{\text{түзу}} > T_{\text{циклойда}}$ , басқаша  $\frac{T_{\text{түзу}}}{T_{\text{циклойда}}} > 1$  екенін аналитикалық түрде дәлелдеу.

Екі уақыттың қатынасын жазайық

$$\begin{aligned} \frac{T_{\text{түзу}}}{T_{\text{циклойда}}} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}}}{\pi \cdot \sqrt{\frac{y_1}{2g}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{y_1}} = \frac{2}{\pi y_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

Біздің мақсат (10) қатынасы әрқашан 1-ден үлкен екенін көрсетуіміз қажет

$$\frac{2}{\pi y_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 1.$$

Екі жағы да оң болғандықтан квадраттайық

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2R.$$

Сонда

$$\frac{4R}{\pi y_1} > 1$$

$$\frac{4}{\pi} > \frac{y_1}{R}. \quad (11)$$

$y_1 < R$  екені белгілі болғандықтан (11) теңсіздік ақиқат екені шығады.

## Қорытынды

Брахистохрона есебінің шешу жолдарын талдай келе, келесі қорытынды тұжырымдар жасалды. Алдымен есептің физикалық мәні түсіндіріліп, ыңғайлы координаттар жүйесі енгізілді. Ньютонның екінші заңы мен энергияның сақталу принципін қолдану арқылы жылдамдық пен биіктік арасындағы қатынас (5) формуласы ретінде анықталды. Доға элементінің формуласы (6) көмегімен қозғалыс уақытының интегралдық функционалы өрнектеліп, вариациялық қағидатты қолдану нәтижесінде осы функционалды экстремумға жеткізетін траекторияның циклоида екені көрсетілді. Аталған теориялық шешім тәжірибе жүзінде де расталды: циклоида бойымен домалаған шардың түзу жолмен салыстырғанда тезірек төмен түсетіні эксперименттік түрде дәлелденген. Осылайша, брахистохрона есебінің классикалық шешімі табиғаттағы экстремальді құбылыстарды түсіндіруге көмектесетін классикалық үлгі болып табылады.

Зерттеу барысында брахистохрона есептерін шешуде классикалық механика тәсілдері (Ньютон динамикасы), аналитикалық әдістер және вариациялық есептеу принциптері қолданылды. Алынған нәтижелер механикадағы экстремаль траекторияларды жобалауда, физикадағы ең аз әрекет принципін түсіндіруде және жылдам түсу жолдарын қажет ететін инженерлік есептерде қолданылуы мүмкін.

## Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Гладков С. О. Сборник задач по теоретической и математической физике. — М.: Физматлит, 2006.
2. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика / Курс теоретической физики. Т.6. — М.: Наука, 1988.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. — М.: Наука, 1965.
5. Noether E. Invariant variational problems, Gött. Nachr. 235–257 (1918).
6. Steudel H. Eine Erweiterung des ersten Noetherschen Satzes, Z. Naturforsch 17A, 133–135 (1962).