Аннотация: Мақалада - жай сандардың құрылымына қатысты кейбір сұрақтар қарастырылған, оларды табу үшін қандай математикалық формулалар бар екені, ең үлкен жай санның бар-жоғы, осы тақырыптың тарихи дамуы сипатталады.

Кілт сөздер: жай сандар, Эратосфен елегі, заңдылық, ең үлкен жай сан.

Жай сандар ерте заманнан бері математиктердің назарын аударды. Жай сандар әлі табылмаған заң бойынша бірінен соң бірі жүреді. Бүкіл әлем ғалымдары оларды әлі де белсенді түрде іздеуде. Сонымен, ерекше сирек кездесетін жай сандардың үлкен санын табу міндеті тұрған Great Internet Mersenne Prime Search жобасы жақында бүгінге белгілі ең үлкен жай санды тапты. Осы орайда «неліктен қазіргі заманда жай сандар соншалықты маңызды?» деген сұрақ туындайды.

1-ден үлкен әрбір натурал сан кем дегенде екі санға бөлінеді: 1 және өзі. Егер ол басқа натурал санға бөлінбесе, онда ол жай сан деп аталады, ал егер оның басқа да бүтін бөлгіштері болса, онда ол құрама сан деп аталады. Әрбір санның жай немесе құрама екенін бірден айту мүмкін емес. Ғалымдар көптеген ғасырлар бойы натурал сандар жиынынан жай сандарды жазуға мүмкіндік беретін формуланы табуға тырысты. Бұл мәселемен бірінші болып 2300 жыл бұрын өмір сүрген ежелгі дәуірдің ұлы математигі Эратосфен айналысты. Эратосфен атақты Александрия кітапханасының бас кітапханашысы, математик, географ, тарихшы, астроном, философ және ақын болды. Мысалы, 1999 санын алайық. Егер арнайы анықтамалық кестелер немесе компьютерлік бағдарлама болмаса, онда Эратосфеннің ескі, бірақ сенімді елегін есте сақтау керек. Бұл б.з.д. ІІІ ғасырда ойлап табылған ескі әдіс.

Эратосфен елегі алдын ала белгіленген N натурал санынан кіші немесе оған тең жай сандар кестесін құрастыру үшін қолданылады.

1. 1 2 3 ... N сандарын жазамыз.

2. 1-ден үлкен бірінші сан 2. Екі тек 1-ге және 2-ге бөлінеді, яғни, жай сан болып табылады.

Біз қатардан (құрама ретінде) екеуінің өзінен басқа 2-ге еселік барлық сандарды сызып тастаймыз.

3. Екінші сызылмаған сан 3. Ол 2-ге бөлінбейді, әйтпесе сызылып тасталатын еді, сондықтан 3 саны 1-ге және 3-ке ғана бөлінеді, сондықтан 3 жай сан.

Біз қатардан 3-ке еселік барлық сандарды сызып тастаймыз.

4. Келесі сызылмаған сан 5. Ол жай сан, өйткені ол өзінен кіші санға бөлінбейді, әйтпесе ол сызылып тасталатын еді. Бестің өзінен басқа 5-ке еселік барлық сандарды сызып тастаймыз.

Біз бұл процесті барлық сызылмаған сандар үшін жалғастырамыз.

Егер р-ден кіші барлық сандар (p - жай) осылайша сызылған болса, онда барлық сызылмаған *p*2-ден кіші сандар жай сандар болады.

Мысал: *N*=50 .

**1 2 3** ~~4~~5 ~~6~~ 7 ~~8 9 10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14 15 16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20 21 22~~ 23 ~~24 25 26 27 28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32 33 34 35 36~~ 37 ~~38 39 40~~ 41 **~~42~~** 43 ~~44 45 46~~ 47 ~~48 49 50~~

Бізге белгілі жай сандар кестесін 1603 жылы итальян математигі Пьетро Антонио Катальди құрастырған. Ол 2-ден 743-ке дейінгі барлық жай сандарды қамтыды.

1770 жылы неміс математигі Иоганн Генрих Ламберт 102000-нан аспайтын және 2-ге, 3-ке, 5-ке бөлінбейтін барлық сандардың ең кіші бөлгіштерінің кестесін жариялады.

19 ғасырдың ортасына қарай 9-ға дейінгі ең кіші бөлгіштердің кестелері құрастырылып үлгерді. Сонымен бірге баспасөзде өте фантастикалық болып көрінетін есептер пайда болды: Вена академиясы «2, 3 және 5-ке бөлінбейтін барлық сандардың Ұлы канондық бөлгіштері және 100330201-ге дейінгі жай сандар» қолжазба кестелерінің 7 үлкен томын алды. Бұл жұмыстың авторы Прага университетінің жоғары математика профессоры Якуб Филипп Кулик болды.

Жай сандарды – оның ішінде үлкен жай сандарды табу - өте қиын тапсырма, өйткені әлі ешкім кез келген жай сандарды жасауға мүмкіндік беретін формуланы немесе алгоритмді таба алмады. Бірақ логикалық сұрақ туындауы мүмкін: «Неліктен жай сандарды шығару керек?»

Әуелі теориялық тұрғыдан маңызды. Жай сандарды генерациялау әрекеттері есептеулер үшін, әсіресе компьютерлік есептеулер үшін жаңа қызықты құралдардың пайда болуына әкеледі. Сонымен қатар, жай сандар тізімінің үлкен болуы әлі дәлелденбеген теоремаларды тексеруге мүмкіндік береді. Егер біреу жай сандар туралы гипотезаны алға тартса, бірақ оны миллиондаған сандардың бірі бұзатын болса, онда сұрақ алынып тасталады. Бұл әртүрлі типтегі жай сандарды іздеуді ынталандырады: Мерсенн жай сандары, егіз сандар және т.б.

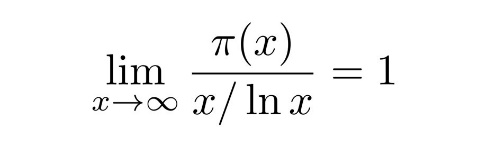
Бірақ шифрлау деп аталатын басқа, практикалық себеп бар. Электрондық пошта, банк қызметі, несие карталары және ұялы телефондар жай сандардың қасиеттеріне негізделген құпия кодтармен қорғалған.

Зерттеушілер 2200 жылдан астам уақыт бойы күресіп келе жатқан жай сандарды жылдам анықтау мәселесі қазіргі компьютерлік технологияны жетілдірудегі ең маңызды мәселе болып табылады. Жай сандарды табудың бір жолы - компьютерде іздеу. Санның 2, 3, 4 және т.б. көбейткіштер екенін қайта-қайта тексеру арқылы оның жай сан екенін оңай анықтауға болады. Егер ол кішірек санның көбейткіші болмаса, ол жай сан. Бұл санның жай екенін анықтаудың көп уақытты қажет ететін тәсілі. Дегенмен, мұны анықтаудың жақсы жолдары бар.

Жай сандар өте көп, сондықтан үлкен санды алып, оған бірді қоссаңыз, жай санға тап болуыңыз мүмкін. Шындығында, көптеген компьютерлік бағдарламалар жай сандарды табу қиын емес екеніне сүйенеді. Бұл 100 санның ішінен кездейсоқ санды таңдасаңыз, компьютер бірнеше секунд ішінде үлкенірек жай санды табады дегенді білдіреді.

Біз жай сандар шексіз көп екенін білеміз, бірақ олар натурал сандарда қаншалықты жиі кездеседі? Басқаша айтқанда, жай сандар қаншалықты жылдам өседі және біз олардың кем дегенде шамамен формуласын таба аламыз ба?

Бұл сұрақтың жауабы 19 ғасырдың аяғында берілген және ол жай сандардың таралу теоремасы деп аталады. Оны тұжырымдау үшін N-нен аспайтын жай сандар санын π(N) деп белгілейміз. Теорема π(N) функциясы үлкен N үшін N / lnN функциясы сияқты әрекет ететінін айтады, мұндағы lnN N натурал логарифмі. Толығырақ қатаң, шекті, бұл функциялардың қатынасы бірге тең:



Теореманы келесідей түсіндіруге болады: 1-ден N-ге дейінгі кездейсоқ таңдалған санның асимптоталық түрде 1/lnN-ге тең жай болу мүмкіндігі бар.

Мысал.

Асимптотикалық заңның көмегімен біз жай 512-битті сандардың шамамен санын есептейміз (ең үлкен 512-ші, бит 1-ге тең).

512 битті санның ең кіші мәні 2511, ең үлкені 2512-1.

Осылайша (*x*1=2511, *x*2=2512) диапазоннан жай сандардың К жуық санын табу керек.

K = π(*x*2)—π(*x*1) ≈  =  =  = ==.

Сонда жай санды таңдаудың берілген диапазондағы кездейсоқ іздеудегі ықтималдығы

P =  ≈  = ≈.

Егер кездейсоқ іздеу тек тақ сандар арасында орындалса, онда

P =  ≈ .

Яғни, кездейсоқ іздеу арқылы 512 разрядты тақ сандар арасындағы жай санды табу үшін орта есеппен 178 итерация қажет болады. 1024 биттік сандар үшін тақ сандар арасында іздеу орта есеппен 355 итерацияны қажет етеді. Жалпы, егер қажетті сан өлшемі (битпен) екі есе ұлғайса, орташа іздеу уақыты да екі есе артады.

Математиктер барлық жай сандарды өрнектейтін формуланы таба алмаса да, мәндері өте үлкен жай сандарды анық табуға мүмкіндік беретін белгілі қарапайым формулалар бар. Жиырма жылдан астам уақыт бойы мұндай негізгі формула 2р-1 болды, оның мәндері Мерсен сандары деп аталады.

Ең үлкен белгілі жай сан – 282 589 933 − 1. Оны Патрик Ларош 2018 жылдың 7 желтоқсанында GIMPS жобасының бөлігі ретінде тапты және 24 862 048 ондық цифрдан тұрады.

Евклид теоремасы бойынша жай сандар саны шексіз. Демек, қазіргі уақытта белгілі ең үлкенінен үлкен жай сандар саны да шексіз. Көптеген энтузиастар, соның ішінде кейбір математиктер, рекордтық жай сандарды іздейді. Электрондық шекара қоры оларды ашқаны үшін санның шамасына байланысты бірнеше марапаттар ұсынады.

Болашақта жай сандар тағы қалай қолданылатынын қазір айту мүмкін емес. Ғажайып академиялық қызығушылық ретінде қабылданатын, нақты әлемде қолдануға болмайтын идеялар қайта-қайта ғылым мен техника үшін таңқаларлықтай пайдалы болып шықты. 20-ғасырдың басындағы атақты математик Годфри Гарольд Харди жай сандардың нақты қолданысы жоқ екенін дәлелдеді. Қырық жылдан кейін компьютерлік байланыс үшін жай сандардың әлеуеті ашылды және олар қазір Интернетті күнделікті пайдалану үшін өте маңызды.

Жай сандар бүтін сандар есептерінің негізі болғандықтан және бүтін сандар нақты өмірде үнемі кездесетіндіктен, жай сандар болашақ әлемде барлық жерде қолданылады. Бұл әсіресе Интернет өмірге қалай еніп жатқанын және технологиялар мен компьютерлердің бұрынғыдан да үлкен рөл атқаратынын ескерсек дұрыс.

Сандар мен жай сандар теориясының кейбір аспектілері ғылым мен компьютердің шеңберінен әлдеқайда асып түседі деген пікір бар. Музыкада жай сандар кейбір күрделі ритмикалық үлгілердің қайталануы неге ұзақ уақыт алатынын түсіндіреді. Бұл кейде заманауи классикалық музыкада белгілі бір дыбыс әсеріне қол жеткізу үшін қолданылады. Сондай-ақ радиотолқындар арқылы жай сандарды тарату бөтен тіршілік формаларымен байланысудың ең жақсы тәсілі болады деп болжанады.

Пайдаланылған әдебиеттер:

Карпенко, А.С. Лукасевич логикасы және жай сандар / А.С. Карпенко. - Мәскеу: Наука, 2017 ж

Сгибнев, А.И. Бөлінгіштік және жай сандар / А.И. Сгибнев. - М.: МЦНМО, 2012 ж

Википедия – еркін энциклопедия: en.wikipedia.org

Bentley, Р. J., The Book of Numbers, Ontario, Firefly Books, 2008.