## МРНТИ 27.41.23

**А.Х.Бакашева**

Военно-инженерный институт радиоэлектроники и связи, г.Алматы

# ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Аннотация.** В предложенной статье рассмотрена постановка транспортной задачи линейного программирования, касающаяся железнодорожных перевозок. Рассмотрено построение первоначального опорного плана методом наименьшей стоимости и представлено решение задачи. Выполненная работа представляет алгоритм реализации транспортной задачи, который может использоваться на практике торговыми предприятиями, занимающимися различного рода поставками, перевозками.

**Ключевые слова:** транспортная задача, линейное программирование, метод наименьшей стоимости, оптимальный план перевозок.

**Abstract.** In the proposed article, the formulation of a linear programming transport task concerning railroad transportation is considered. The construction of the initial baseline plan by the least cost method is considered and the solution of the task is presented. The work done proposes an algorithm for the implementation of the transport task, which can be applied in practice by trade enterprises engaged in various kinds of deliveries and transportation.

**Keywords:** transport task, linear programming, least cost method, optimal transportation plan.

**Аннотация.** Бұл мақалада темір жол тасымалымен байланысты сызықтық бағдарламалау есептері қарастырылады. Ең аз шығын әдісін қолданып бастапқы тірек жоспарды құру қарастырылып, мәселенің шешімі ұсынылады. Көрсетілген жұмыста жеткізу және тасымалдаудың әртүрлі түрлерімен айналысатын сауда кәсіпорындары тәжірибеде қолдануға болатын көлік тапсырмасын орындау алгоритмі ұсынылған.

**Кілттік сөздер.** көлік мәселесі, сызықтық бағдарламалау, ең аз шығын әдісі, оңтайлы тасымалдау жоспары.

В связи с развитием обширной транспортной сети и интенсивным обменом товарами, продукцией между регионами, предприятиями, странами, большое значение приобретает решение задач, в которых составление порядка перевозок отдельного однородного продукта от пунктов производства к пунктам потребления различными видами транспорта осуществляется с целью минимизации затрат. Данные задачи являются задачами оптимизации [2]. Оптимизация – определение наиболее целесообразного варианта среди многих, то есть лучшего с точки зрения намеченной идеи [1].

Решить содержательно задачи оптимизации позволяют не только общие математические методы, но и системы автоматизированного проектирования, которые существенно облегчают процесс решения и уменьшают затраты времени.

# Постановка и математическая модель транспортной задачи

Транспортная задача (далее - ТЗ) – математическая задача линейного программирования с особой структурой. Имеется *n* потребителей отдельного товара, которые расположены в пунктах *B1, B2, …, Bn*, при этом их потребности известны и равны *b1, b2, …, bn*. Товар, о котором идет речь, создается *m* предприятиями *Q1, Q2, …, Qm* в численностях, равных соответственно *a1, a2, …, am*. Их также называют запасами. Числа *сij* представляют затраты, необходимые для доставки единицы товара от производителя *Qi* к потребителю *Bj* (например, расстояния, стоимости и т.д.), а *xij* – соответствующее количество товара:

Матрицы затрат и плана перевозок представлены в формуле (1):

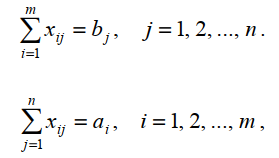
*,* (1)

В виде целевой функции обозначаются суммарные затраты на перевозки:



(2)

Сумма поставок товара данному потребителю от производителей есть сумма элементов *j*-го столбца матрицы *X.* Эта величина должна быть равна потребности *bj*:



(3)

т.е., сумма поставок товара утвержденным потребителям от заданного производителя равна запасам утвержденного производителя. Иначе говоря, обе стороны должны получить выгоду: потребности должны быть удовлетворены, запасы – вывезены.

Задача может быть решена при соблюдении уравнения баланса, т.е. суммарные запасы производителей равны суммарным потребностям потребителей. В таком случае транспортная задача имеет решение (необязательно единственное)



(4)

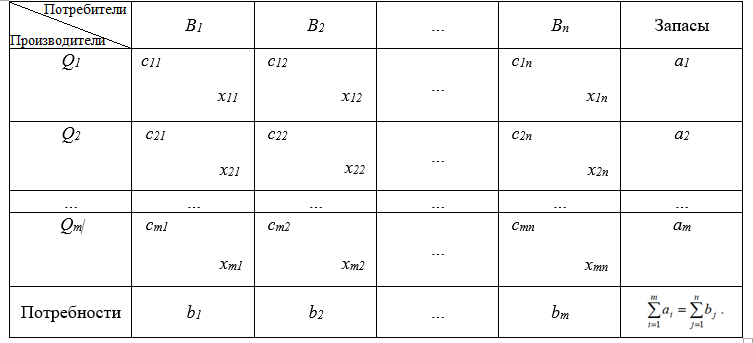
Тогда говорят о *закрытой* модели транспортной задачи с *правильным балансом* (иначе – *открытая* модель с неправильным балансом) [2].

Еще один вид ограничений:

 (5)

Таким образом, мы имеем дело с задачей ЛП в канонической форме.

Теперь рассмотрим *транспортную таблицу* (табл.1). В ее внутренних клетках в левом верхнем углу записывают затраты на единицу груза, в правом нижнем углу – количество единиц груза.

**Табл.1. Транспортная таблица**

Рассмотрим транспортную задачу, связанную с железнодорожными перевозками, построение оптимального плана которой осуществимо методом наименьшей стоимости.

**Задача.** На станциях Суховская, Черемхово, Зима сосредоточены запасы угля в количествах 110, 190, 90 т соответственно. Груз необходимо поставить на станции Мальта, Белая, Забитуй, Мегет, потребность которых составляет 80, 60, 170, 80 т соответственно. Стоимость доставки 1 т угля со станции Суховская в пункты назначения соответственно равна – 8, 1, 9, 7 ден. Ед.; со станции Черемхово – 4, 6, 2, 12 ден. ед.; со станции Зима – 3, 5, 8, 9 ден. ед. Составить оптимальный план перевозок, при котором цена перевозки (сij) была наименьшая.

# Построение начального опорного плана методом наименьшей стоимости

Запишем исходные данные в виде таблицы (Табл.2).

**Табл.2. Исходные данные**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Аi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы (ai)** |
| ст. Суховская | 8 | 1 | 9 | 7 | 110 |
| ст. Черемхово | 4 | 6 | 2 | 12 | 190 |
| ст. Зима | 3 | 5 | 8 | 9 | 90 |
| **Потребности (bi)** | 80 | 60 | 170 | 80 |  |

Перед началом решения необходимо проверить, закрытая или открытая модель задачи. С помощью формулы (4) определим, что запасы равны потребностям, значит, задача является закрытой:

∑ 𝑎𝑖 = 390

∑ 𝑏𝑗 = 390

∑ 𝑎𝑖 = ∑ 𝑏𝑗

Для нахождения базового плана применяем метод наименьшей стоимости [3]. Суть решения выбранным методом: из таблицы стоимостей выделяют наименьшую, и в клетку, что ей соответствует помещают меньшее из чисел аi, или вj [4].

Затем из рассмотрения исключают либо столбец, который соответствует получателю, потребности которого полностью удовлетворены, либо же строку, что соответствует отправителю, запасы которого полностью будут израсходованы, либо и строку, и столбец, если запасы отправителя и потребности получателя израсходованы и удовлетворены соответственно.

Из части, что осталась в таблице стоимостей снова следует выбирать наименьшую стоимость впредь до того, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены. Наименьший элемент из исходных данных равен с01=1. Элементы для этого запаса равны 110, а потребности 60. Так как минимальным является 60, то вычитаем его. х01 = min(110,60) = 60.

На основании полученных данных заполним таблицу 3.

**Табл.3. Первый этап метода**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | 8 | 1 | 9 | 7 | 110-60=50 |
| ст. Черемхово | 4 | x | 2 | 12 | 190 |
| ст. Зима | 3 | x | 8 | 9 | 90 |
| **Потребности** | 80 | 60-60=0 | 170 | 80 |  |

Далее расчёты выполняются по аналогии. Следующий наименьший элемент с12=2. Запасы и потребности для него равны 190 и 170 соответственно. Минимальным является 170, то следует вычитать его. х12 = min(190,170) = 170.

**Табл.4. Второй этап метода**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | 8 | 1 | x | 7 | 50 |
| ст. Черемхово | 4 | x | 2 | 12 | 190-170=20 |
| ст. Зима | 3 | x | x | 9 | 90 |
| **Потребности** | 80 | 0 | 170-170=0 | 80 |  |

Далее следует элемент с20=3. Запасы и потребности для него равны 90 и 80 соответственно. Минимальным является 80, то вычитаем его. х20 = min(90,80) = 80.

**Табл.5. Третий этап метода**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | x | 1 | x | 7 | 50 |
| ст. Черемхово | x | x | 2 | 12 | 20 |
| ст. Зима | 3 | x | x | 9 | 90-80=0 |
| **Потребности** | 80-80=0 | 0 | 0 | 80 |  |

Следующий наименьший элемент с03=7. Запасы и потребности для него равны 50 и 80 соответственно. Минимальным является 50, то вычитаем его. х03 = min(50,80) = 50.

**Табл.6. Четвертый этап метода**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | x | 1 | x | 7 | 50-50=0 |
| ст. Черемхово | x | x | 2 | 12 | 20 |
| ст. Зима | 3 | x | x | 9 | 10 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 0 | 80-50=30 |  |

Следующий наименьший элемент с23=9. Запасы и потребности для него равны 10 и 30 соответственно. Минимальным является 10, то вычитаем его. х23 = min(10,30) = 10.

**Табл.7. Пятый этап метода**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | x | 1 | x | 7 | 0 |
| ст. Черемхово | x | x | 2 | 12 | 20 |
| ст. Зима | 3 | x | x | 9 | 10-10=0 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 0 | 30-10=20 |  |

Следующий наименьший элемент с13=12. Запасы и потребности для него равны 20 и 20.

Минимальным является 20, то вычитаем его. х13 = min(20,20) = 20.

**Табл.8. Шестой этап метода**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | x | 1 | x | 7 | 0 |
| ст. Черемхово | x | x | 2 | 12 | 20-20=0 |
| ст. Зима | 3 | x | x | 9 | 0 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 0 | 20-20=0 |  |

В результате расчетов получен опорный план (табл.9).

**Табл.9. Опорный план**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Станции назначения (Bj)**  **Станции отправления (Qi)** | ст. Мальта | ст. Белая | ст. Забитуй | ст. Мегет | **Запасы** |
| ст. Суховская | 0 | 60 | 0 | 50 | 110 |
| ст. Черемхово | 0 | 0 | 170 | 20 | 190 |
| ст. Зима | 80 | 0 | 0 | 10 | 90 |
| **Потребности** | 80 | 60 | 170 | 80 |  |

Рассчитаем суммарные затраты по полученному плану, вычислив сумму произведений цен и перевозок:

𝑍 = 1 · 60 + 7 · 50 + 2 · 170 + 12 · 20 + 3 · 80 + 9 · 10,

𝑍 = 1320 *ден*. *ед*.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бояркина Г. П. Линейное программирование. Динамическое программирование: Учеб- ное пособие. Иркутск, 2003. – 45 с.
2. Зелова М.И., Косачева Н.А., Черняева Т.Н. Применение линейного программирования в организации железнодорожных перевозок: научная статья / М.И. Зелова, Н.А. Косачева, Т.Н. Черняева – Молодая наука Сибири. – 2021. - №2(12).
3. Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирования / Е.П. Нестеров. – М.: Транспорт, 1971.–216 с.
4. Таирова, Е. В. Линейное программирование: учеб. пособие для студентов всех специ- альностей / Е. В. Таирова [и др.]; под общ. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: ИрГУПС, 2007. – 75 с.
5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. – М., 1961. - 494 с.