[КГУ "ОСШ № 4 имени Шакарима"](https://schools.kundelik.kz/school.aspx?school=1000001001136) оо [по ШР УО ВКО](https://schools.kundelik.kz/school.aspx?school=1000001001136)

**МЕТОДИЧЕСКОЕ**

**пособие**

По математике для учащихся 10-11 классов



Автор: Умурзакова Калия Медеевна

Учитель математики КГУ «Общеобразовательная средняя школа №4 им.Шакарима»

Соавтор Лобанова И.В.Методист ГУ» Отдела образования по Шемонихинскому районуУО ВКО».

2024 г.

**Пояснительная записка**

В курсе математики одно из важных мест отводится решению уравнений. По этому изучению методов их решения должно быть уделено значительное внимание. Тема методической разработки: «Виды уравнений и способы их решения». Материал математического пособия ориентирован на систематизацию знаний по теме «Уравнения» Настоящее пособие предназначено для старшеклассников, готовящихся к аттестации и к сдаче ЕНТ. По каждой теме кратко излагаются теоретические основы, приводятся примеры решения уравнений.

**Цель пособия**: развитие математических способностей: логически мыслить, умение анализировать, обобщать, делать выводы через усвоение различных методов решения уравнений; преодоление психологического барьера, связанного с новой формой проведения итоговой аттестации по математике, и обретение уверенности в своих силах.

**Задачи**: обобщить понятия: «уравнение», «корень уравнения»;

систематизировать основные методы решения уравнений, научиться применять их в новых нестандартных ситуациях; приобрести навыки работы с тестами, совершенствовать навыки самостоятельной работы, совершенствовать навыки самоконтроля

**ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

В результате изучения методического пособия обучающийся ***должен знать*:**

- понятия «уравнение», «корень уравнения;

- виды уравнения;

     что значит решить уравнение

     основные способы решения различных уравнений (линейных и квадратных);

     алгоритмы решений всех видов уравнении.

***должен уметь*:**

     определять вид уравнения;

     выполнять равносильные преобразования;

     применять способы решения;

     осуществлять выбор метода решения данного уравнения;

     выбирать и записывать ответ;

     решать линейные, рациональные, квадратные, иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения.

***должен владеть:***

     анализом и самоконтролем;

     исследованием ситуаций, в которых результат принимает те или иные количественные или качественные формы.

Изучение данного пособия ***дает*** обучающимся ***возможность:***

     повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;

     освоить основные приемы решения уравнении;

     познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения уравнении;

     повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;

     познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов;

     усвоить основные приемы и методы решения уравнений;

     применять алгоритм решения уравнений.

**УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п\п | Наименование разделов и тем | Количество часов | Формы контроля |
| 1 | Введение.  Линейные уравнения | 2 | Тест. Самостоятельные работы. Контрольная работа |
| 2 | Квадратные уравнения | 3 | Контрольный тест |
| 3 | Уравнения с модулями | 4 | Урок обобщение |
| 4 | Тригонометрические уравнения | 5 | Тест, самостоятельные работы |
| 5 | Иррациональные уравнения | 4 | Контрольный тест |
| 6 | Логарифмические уравнения | 3 | Самостоятельные работы. Контрольный тест |
| 7 | Уравнения с параметрами | 5 | Контрольный тест, обобщающий урок |
|  | ИТОГО | 26 | 26 |

**СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО КУРСА**

**Введение. «Понятие уравнения, корень уравнения».**

**Тема 1. Линейные уравнения с параметром**.

Алгоритм решения ли­нейных уравнений, ли­нейных уравнений с параметром. Зависимость количества корней в зависимости от коэффициентов *а* и *b.* Решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным.

**Тема 2. Квадратные уравнения.**

Понятие квадратного уравнения с параметром. Решение квадратных уравнений с параметрами. Зависимость, количества корней уравнения от коэффициента *а* и дискриминанта. Решение с помощью графика. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром.

**Тема 3. Показательные и логарифмические уравнения.**

Алгоритм решения показательного и логарифмического уравнении.

Метод приведения обеих частей к одному основанию.

Метод разложения на множители.

Метод ведения новой переменной.

Метод логарифмирования обеих частей уравнения.

**Тема 4. Решение различных видов уравнений и нера­венств с параметрами.**

Решение тригонометрических уравнений. Решение логарифмических уравнений, неравенств с параметром. Решение иррациональных уравнений, неравенств с параметром.

В этом задании речь пойдет о различных типах уравнения и об общих методах их решений. Напомним, что уравнением называется равенство 𝒇𝟏 **(x) =** 𝒇𝟐**(x),**

левая и правая части которого являются алгебраическими выражениями или функциями от Х . Многие задачи сводятся к решению уравнений, т.е. к нахождению всех тех действительных значений Х, которые удовлетворяют равенству (I), т.е. всех тех значений Х, подстановка которых в равенство (I) превращает его в верное числовое равенство. Такие значения Х называются корнями уравнения. При этом может случиться, что равенство (I) ни при каких (действительных) Х не превращается в верное равенство, в этом случае говорят, что уравнение (I) не имеет решений. (Кроме того, корни могут занимать целые промежутки на числовой оси.) Итак, задание "решить уравнение (I)", означает - найти все корни этого уравнения или доказать, что корней нет. При некоторых значениях Х одна или обе части равенства (І) могут терять смысл - быть не определенными. Такие значения Х, естественно, корнями не считаются. Областью допустимых значений (ОД3) уравнения (I) называется множество всех значений Х, при которых определен обе части одного уравнения. Ясно, что всякий корень принадлежит ОДЗ, т.е. множество корней является подмножеством ОДЗ. Поэтому очень полезно при решении уравнений с самого начала обратить внимание на ОДЗ и по возможности её найти - это, с одной стороны, поможет в дальнейшем, c другой, может оказаться, что ОДЗ содержит мало чисел и среди них легко отобрать корни. Нужно, однако, обратить внимание на то, что вычисление ОДЗ не является обязательным шагом при решении уравнения. Приведем примеры.

Пример І.

Уравнение *х*2- 1 = 0 имеет в качестве ОДЗ множество всех действительных чисел. Множество его решений состоит из двух корней *х*1 = 1, *х*2=-1.

Пример 2.

Уравнение *х*2+ 1 = 0 также имеет в качестве ОДЗ множество всех действительных чисел, но решений не имеет.

Пример 3.

*х*2−*х*

Рассмотрим уравнение + 1. Его ОДЗ содержит все действительные числа, кроме числа х = *х*

0, и во всех точках ОДЗ превращается в верное равенство, так что решение этого уравнения: Х - любое ненулевое число, или х 𝜖 (-∞ ;0 )∪ (0;+∞ )

Пример 4. Пусть нам требуется решить такое сложное уравнение*х*

√

*х*

−

1

+

cos

*х*

*х*

+

√

1

−

*х*

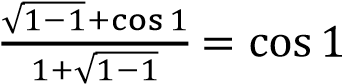
=

cos

Начнем с определения ОДЗ. В левой части дважды встречается знак квадратного корня, значит, оба подкоренных выражения должны быть положительными: х-1≥0; 1-х≥0 Кроме того, знаменатель не должен принимать нулевое значение:

х+ 0. Первые два условия дают. 1≥х≥ 1, x = 1. При этом значении Х знаменатель

=1 не равен нулю. Итак, ОДЗ содержит единственную точку Х = 1. Так как всякий корень лежит в ОДЗ, то нам достаточно проверить, является ли Х = 1 корнем уравнения:

- верное числовое равенство.

Ответ: х=1

Процесс решения уравнения обычно состоит в переходе от одного уравнения к другому - более простому. При этом важно фиксировать; как связаны корни нового уравнения с корнями старого. В том случае, когда все корни старого уравнения являются корнями нового, говорят, что новое уравнение есть следствие старого.

Если новое уравнение удается решить, то при помощи подстановки его корней в исходное можно проверить, какие из них ему удовлетворяют.

Наиболее важным является понятие равносильности двух уравнений.

Два уравнения называются равносильными, если каждое из них является следствием другого.

Иными словами, уравнения называются равносильными, если множества, их решений совпадают. В частности, все уравнения, не имеющие решений, равносильны между собой.

Переход от одного уравнения к нему равносильному может осуществляться на основе следующих правил.

Правило І. Если к обеим частям уравнения прибавить выражение (функцию), имеющее смысл во всей ОДЗ данного уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.

Правило 2. От умножения обеих частей уравнения на выражение 𝜑 (х), которое при всех Х из ОДЗ имеет смысл и не обращается в нуль, образуется уравнение, равносильное исходному. Что же делать, если в процессе решения потребовалось произвести умножение на выражение у(х), могущее обращаться в нуль, или на выражение, про которое нам неизвестно, может оно обращаться в нуль или нет? В этом случае корни нового уравнения 𝑓1(x)∗ 𝜑(х) = 𝑓2(x)∗ 𝜑(х),

помимо корней старого уравнения 𝑓1(x) = 𝑓2 (x), будут содержать ещё корни уравнения𝜑(х)= 0 , т.е. новое уравнение будет следствием старого, и нам достаточно проверкой отбросить посторонние корни.

Вообще, в процессе решения уравнения часто трудно соблюсти требование равносильности; наиболее важно не терять корней уравнения, т.е. от одного уравнения переходить к таким уравнениям, которые являются его следствиями. Возможные посторонние корни отбрасываются проверкой.

Обратим внимание ещё на два преобразования уравнения, которые иногда приводят к ошибкам, - это приведение подобных членов и сокращение общего множителя

Пусть дано уравнение = 2. Приводя подобные члены, получим: Х = 2.

Однако при X = 2 левая часть исходного уравнения не определена, и, значит, Х = 2 не есть его решение. Так что денное уравнение решений не имеет.

Этот пример показывает, что при приведении подобных членов ОДЗ уравнения может увеличиваться и получится следствие, не эквивалентное данному. Там что необходимо либо проводить проверку, либо следить за изменением ОДЗ.

Рассмотрим теперь уравнение *х*3 + 1 = *х*2 = х.

Разложим обе части на множители

(х +1) ( *х*2 - x +1) = (х+1) х.

Возникает желание сократить на х + 1 или то же самое, умножить на 1 . В таком случае мы *х*+1

*х*2 - х + 1 = х, откуда *х*2 - 2х + 1 = 0, т.е. (*х* − 1)2 = 0 или х = 1. Между тем исходное уравнение имеет ещё один корень *х*2 = - 1.

Потеря корня в таком "решении" связана с неправильным применением правила 2 , так как

1 выражение определено не всюду в ОДЗ. *х*+1

Лучше всего при решении уравнений вида h(x) f1(х)= h(x)f2(х) рассуждать так: переносим член в левую часть уравнения и выносим за скобки множитель h(x):

h (х)( f1(х) -f2(х)) = 0.

Так как произведение двух чисел равно нулю тогда и только нашего уравнения будут как корни уравнения h (х)= 0, так и корни уравнения f1(х) - f2(х) = 0.

Правильное решение уравнения *х*3 + 1 = *х*2 + х будет выглядеть следующим образом.

Разложим обе части на множители: (х+1) (*х*2 - х +1) = (х +1) х. Перенесем все члены в левую часть уравнения и вынесем за скобки общий множитель: (х + 1) (*х*2 -2 х + 1) = 0, или (x +1) (*х* − 1)2= 0.

Отсюда находим корни: *х*1 = 1, *х*2 = -1.

Теперь мы рассмотрим некоторые особенности в решении различных типов уравнений.

**УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЯМИ**

Основная особенность в решении таких уравнений состоит в том, что они решаются не сразу во всей числовой прямой, а по частям. При этом числовая прямая разбивается на части так, чтобы в каждой части каждое выражение, встречающееся под модулем, сохраняло знак. Внутри каждой такой части модули можно опустить, поставив знак, «+» или «-» перед соответствующим выражением в зависимости от того, положительно оно или отрицательно.

Пример 5.

Решить уравнение | x +1 | + | 1 - 2х | = 6.

Решение. ОДЗ уравнения - вся числовая прямая. В этом уравнении имеется два выражения под

модулем: х+1 и 1 - 2х

Первое выражение положительно при Х > - 1 , второе при X < ½, поэтому числовая ось должна быть разбита на три части

• а) Пусть x < - 1 . В этом случае | х + 1| = -(x-+1), так как в этом промежутке х + 1 - число отрицательное. Далее, | 1-2 х| = 1 – 2х - число положительное. Имеем - x - 1 + 1 - 2x = 6;

-3x = 6 ;

х =-2.

После этого ном необходимо ещё проверить, принадлежит ли найденное значение х1 = - 2 рассматриваемой части. Так как - 2 < - 1, то х1 <-1, и, значит, х1= - 2 - решение нашего уравнения.

6) Пусть - 1 ≤ х < 1⁄2. В этой области первый и второй модули раскрываются со знаком плюс:

х + 1 + 1 - 2x = 6;

- x = 4;

х = - 4

Проверим, лежит ли значение х = - 4 в рассматриваемой области. Так как - 4 < - 1 , то найденное значение корнем исходного уравнения не является. Наше уравнение в интервале

- 1 ≤ х < 1⁄2 вообще решений не имеет.

в) Пусть х ≥ 1⁄2 . В этом случае |х + 1|= x+1; |1 – 2х| = 2х – 1.

Имеем

x+1 + 2x-1 = 6,

3х = 6,

х = 2

Так как 2 ≥ 1⁄2 то найденное значение - корень исходного уравнения.

Ответ: х1= - 2, х2=2.

Пример 6.

Решить уравнение 14 х - 2 х2= | х - 7 |

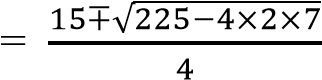
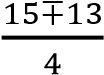
Решение. ОДЗ уравнения - вся числовая прямая,

Выражение х - 7, стоящее под знаком модуля, положительно при x > 7 , поэтому числовая прямая разбивается на две части

а) Пусть х ≤ 7. Тогда | x - 7 | = - (x-7);

т.е. уравнение приведется к виду

14х - 2 х2 = - х + 7 или 2 х2 - 15 х + 7 = 0,

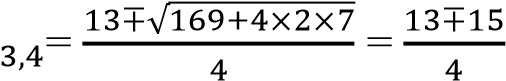
откуда х1,2 = , т.е. х1= 7, х2 = 1⁄2.

Оба значения попадают в рассматриваемую область и поэтому являются решениями исходного уравнения.

6) Пусть х > 7. В этой области | х - 7 | = х - 7, т.e.

14х - 2 х2 = х - 7;

2 х2 - 13х – 7 = 0;

х,

х3 = - 1⁄2, х4= 7.

Так как ни одно из неравенств - ½ > 7 , 7 >7 не верно, то оба найденные значения мы должны отбросить.

Ответ: х1= 1⁄2, х2 = 7.

Обратим внимание, что сами критические точки тоже должны включаться в какие-нибудь из рассматриваемых интервалов. В предыдущем примере точка х = 7 включена в первый интервал, но не включена во второй. Можно было бы включить её только во второй, тогда в случае "а" мы отбросили бы корень х= 7, а в случае "б" не отбрасывали бы х = 7.

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

Решение тригонометрического уравнения обычно распадается на три части. Сначала с помощью тригонометрических преобразований уравнение приводится к такому виду, чтобы одна из замен типа

y = sin (y(х)),

y = сos (у(x)),

y=lg (y(x)),

y=ctg(y(x)),

где у(х) - алгебраическое выражение, превращала исходное уравнение в алгебраическое уравнение от у. затем решается это алгебраическое уравнение и находятся его корни

у1 = а,

у2= в , ….,

ук= f.

Ук = f.

Далее используются формулы решения простейших тригонометрических уравнений:

sin 𝑧 = a <=> z = (−1)𝑛 arcsin a +𝜋n, n ∈ z ;

cos 𝑧 a <=> z = ∓arccos a +2𝜋k, k ∈ z;

tg 𝑧= в <=> 𝑧 = arctg b + 𝜋l , l ∈ z;

ctg 𝑧= b <=> z = arctg b + 𝜋m, m ∈ z ;

( 𝑧 = {0, +1, −1, +2, −2, +3, −3, … } )

(В этих формулах |a| ≤ 1. При | a | > 1 первые два уравнения решений не имеют.) С их помощью решение oсновного уравнения сводится к решению одного или нескольких

алгебраических уравнений. Если, например, мы производили замену у = sin(у(х) ) и нашли корни у1 = а, у2 = в , то получим уравнение

у(x) = (−1)𝑛arcsin a + 𝜋n, n ∈ z ;

y (x) = (−1)𝑛arcsin b + 𝜋m, m ∈ z ;

Здесь нужно подчеркнуть, что параметр: n и m не меняются независимо друг от друга и поэтому должны обозначаться разными буквами.

Пример 7.

Решить уравнение 𝑐𝑜𝑠2х + sin x = 1⁄4

Решение. ОДЗ уравнения - вся числовая прямая.

Воспользуемся формулой

𝑐𝑜𝑠2х + sin2x = 1, т.e. 𝑐𝑜𝑠2х = 1 - sin2x

Имеем 1- sin2x + sinх = ¼. Здесь напрашивается замена у = sinх. С помощью неё получаем

1 - у2+ y = 1⁄4;

у2 - y - 3⁄4= 0;

у1 = - ,

у2 = 32.

Таким образом, получается два уравнения:

sin х1= - 12, х = (-1) arсsin(-  ) + 𝜋n, n ∈ z ;

sin х2= 32 не имеет решений, так как .



Так как arсsin(-) = - 𝜋/6 , то получим

Ответ: х = (−1)𝑛+1 × 𝜋/6 + 𝜋n, n ∈ z ;

Пример 8

Решить уравнение 4+ 2 cos 2х = 7 sin 2х

ОДЗ уравнения - вся числовая прямая. Воспользуемся формулой синуса двойного угла

sin 2х = 2sinх ×cos х и формулой

1 = cos 2х+ sin 2x

4sin 2x + 4 cos 2х + 2 cos 2х = 14 sinx × cos x;

4sin 2x + 6 cos 2х - 14 sinx × cos x = 0;

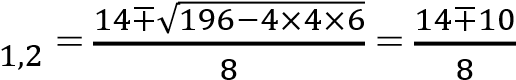
Мы видим, что деление обеих частей уравнения на

cos 2х приводит его к квадратному уравнению относительно tgx.

Так как деление возможно только на ненулевое число, то мы должны отдельно рассмотреть т.е х, для которых cos x = 0, т.e. x = 𝜋 + 𝜋k, k ∈ z.

Для таких х 2исходное уравнение превращается в неверное равенство 4 = 0, т.е. среди них нет корней уравнения, и, значит, деление на cos 2х приведет нас к эквивалентному уравнению

4 𝑡𝑔2х + 6 – 14 𝑡𝑔х = 0

Отсюда 𝑡𝑔х.

Мы получаем tg х1 = 3, tg х2= 12 и находим

Ответ:

х1= arctg 3 + 𝜋 × 𝑛,

х2 = arctg  + 𝜋 × 𝑘, n, k ∈ z.

При решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, обычным приемом является сравнение тригонометрических функций от обеих частей уравнения. Однако следует помнить, что уравнение, получающееся при этом, является следствием исходного, но, как правило, не равносильно ему.

Например, из f (x) = g ( x ) следует равенство

cos (f(x)) = cos (g(х)).

С другой стороны, последнему равенству удовлетворяют все те х , для которых f(+2х) = ∓ g(x) + 2 𝜋 × 𝑘, при любом k ∈ z, а не только те х , для которых f(x) = g(х).

Поэтому вышеуказанный прием может привести (и, пак правило, приводит) к появлению посторонних корней, для выявления которых необходима проверка.

Следует также попить, что поскольку функция tg x и сtg х не определены при некоторых х, то переход от уравнения f (x) = g ( x ) к уравнению tg (f (x)) = tg (g (x)) или сtg (f(x) = ctg (g (x)) может привести к потере решений. В этом случае нужно дополнительно выяснить, могут ли f(х) и g ( x ) принимать одинаковые значения, не лежащие в области определения функции tg (соответственно ctg ).

Пример 9.

Решить уравнение 2arctg x + 3 arcctg x = 𝜋

2 Решение. Перепишем данное уравнение в виде

2 arctg x = 𝜋/2 - 3 arcctg x.

Пусть arctg x = 𝛼, arcctg x = 𝛽, тогда tg 𝛼 = х,

- 𝜋/2 < 𝛼 < 𝜋/2 ; ctg𝛽 = х, 0< 𝛽 < 𝜋.

Взяв тангенс обеих частей уравнения, получаем:

tg 2𝛼 = tg( 𝜋/2 - 3𝛽) или tg 2𝛼 = ctg 3 𝛽

Используя формулы

;

получим:

; ведь ()

Или

Переносим в левую часть и разлагаем на множители:

*;*

х ( х4 + 2х2 + 1 ) = 0;

х ( (х2 + 1)2 ) = 0.

Отсюда х = 0.

Проверка показывает, что х = 0 корнем не является: 2 arctg 0 =0 ;

а справа 𝜋/2 - 3 arcctg 0 = - 𝜋 ≠ 0. 2

Но пока ещё рано делать вывод о том, что уравнение не имеет решений. Применяя функцию tg

к обеим частям, мы могли потерять корни; это те корни, для которых tg2 𝛼 и ctg3𝛽 не существуют, т.е. cos2 𝛼 = 0 или sin 3𝛽 = 0.

Рассмотрим эти значения 𝛼 , 𝛽 отдельно.

Пусть cos2 𝛼 = 0. Тогда 𝜋 + 𝜋 × 𝑘, где k ∈ z

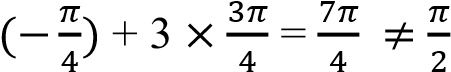
Вспомним, однако, что угол 𝛼, как арктангенс, заключен в интервале ]− 𝜋/2 ; 𝜋/2[, т.е. – 𝜋 < 2𝛼 < 𝜋 .

В этом интервале имеется только две возможности для 2𝛼 – это 2𝛼 = ∓ 𝜋/2 , т.е. 𝛼 = ∓ 𝜋/4.

Соответственно tg 𝛼 = ∓ 1.

Остается проверить, будут ли эти значения решениями исходного уравнения:

 2 arctg 1+ 3 arcctg 1= 2 × 𝜋/4 𝜋

2 arctg (-1) + 3 arcctg (- 1) = 2 × .

Если же sin 3 𝛽 = 0, то arcctgх = 𝛽 = 𝜋 или 2𝜋 ( т.к. 0< 𝛽 < 𝜋). 3

Тогда arctgх = 𝜋/6 или, соответственно – 𝜋/6.

Имеем и

Ответ: Решений нет.

В заключение добавим, что не следует забывать о том, что область определения функций arcsin х и arccos х равна интервалу ]-1; 1].

Это является существенным при отыскании ОДЗ уравнений с обратными тригонометрическими функциями.

**ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Иррациональными называются уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком корня. Во многих случаях, применяя однократно или многократно возведение в степень обеих частей уравнения, удается свести иррациональное уравнение к алгебраическому уравнению той или иной степени (являющемуся следствием исходного уравнения). Так как при возведении в степень могут появиться посторонние решения, то всегда необходима проверка.

Пример 10

Решить уравнение х 

Решение. ОДЗ уравнения определяется условием

х+4 ≥ 0, т.е. х ≥ - 4

Уединяем радикал в левой части уравнения: 

Возводим обе части в квадрат: x+4 = 4х2- 28х+ 49 или 4х2- 29х+ 45 = 0

Находим корни этого уравнения: х1= 5, х2= 9/4

Оба корня лежат в области определения, однако лишь первый удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: Х = 5.

В связи с этим примером отметим, что при возведении в квадрат уравнения вида

(А и В - зависят от х) получится уравнение A= В2, которое равносильно уравнению = |В| ; поэтому лишними будут только те корни, для которых

В< 0, так что не обязательно проводить полную проверку, связанную с извлечением корня, - достаточно найти знак В. В нашем примере при х = 5 имеем B = 2×5-7 > 0, а при х = 9/4

имеем B = 2×9/4- 7 < O, и по этой причине х= 9/4 - лишний корень. Обратим ещё внимание на то, что все решения уравнения A= В2 будут лежать в ОДЗ исходного = В.

Действительно, при подстановке решений уравнение A= В2 превратится в верное числовое равенство, но

В2 ≥ 0, и поэтому А ≥ 0, т.е. эти корни лежат в ОДЗ исходного уравнения. Так что в этом случае нет необходимости вычислять ОДЗ. (См. также пример 13.)

Если в уравнение входит два и более корня, то возведение в степень приходится повторять несколько раз.

Пример 11.



Решение. ОДЗ этого уравнения определяется условиями

x+2 ≥ 0, х-2 ≥ 0, 3х-2 ≥ 0, т.e. x ≥ 2.

Возводим обе части в квадрат:

х + 2 + 2√(х + 2)(х − 2) + х – 2 = 3х – 2.

Уединяем квадратный корень



Снова возводим в квадрат 4 (х2 − 4) = х2 - 4х+ 4.

Отсюда 3х2 + 4х - 20 = 0 или х1 = 2, х2 = - .

Второе значение - не лежит в области определения, так что остается проверить

х1 = 2 . Имеем - верное равенство,

Ответ: х = 2.

Обратим внимание на то, что не всегда нужно спешить с возведением в степень. Иногда внимательный взгляд на уравнение позволяет сделать важные выводы, которые делают ненужной большую часть вычисления.

Пример 12.

Решить уравнение .

Здесь полезно заметить, что квадратный корень - число неотрицательное. Поэтому левая часть данного уравнения при всех неотрицательна. Справа же стоит разность двух положительных чисел, причем вычитаемое всегда больше уменьшаемого, так как х + 2> х при всех х . Это значит, что правая часть при всех допустимых значениях х отрицательна, т.е. уравнение решений не имеет.

**ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

Это уравнения, содержащие неизвестную под знаком логарифма или в основании логарифма (или то и другое одновременно).

Главная особенность при решении логарифмических уравнений состоит в необходимости внимательно следить за ОДЗ: под знаком логарифма могут стоять только положительные величины, в основании логарифмов - только положительные величины, отличные от единицы. Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида log ах =в, где a >0, a ≠1,

Оно решается потенцированием х = ав.

Решение других логарифмических уравнений иногда удается свести к решению уравнений простейшего вида.

Пример 14.

Решить уравнение log x (x + 6) = 2.

Решение. Находим ОДЗ: х > 0, х ≠ 1, х + 6 > 0,

т.е. ОДЗ: х > 0, х ≠ 1. Потенцируем х+6 = х2, отсюда х1 = 3, х2=-2 .

Второй корень не входит в ОДЗ

Ответ: х = 3.

Пример 15.

Решить уравнение log 2 (4х4 + 3х2 + 6) + log 1⁄2 ( х2+1) = log 2 ( 3х2 + 6 ).

Решение. ОДЗ уравнения определяется условиями

4х4 + 3х2 + 6 > 0, х2+1 > 0, 3х2 + 6 > 0.

Так как квадрат числа не отрицателен, то эти условия выполняются всегда, т.е. ОДЗ - вся числовая прямая.

Приведем все члены к одному основанию

log 1⁄2 ( х2+1) = log 2 ( х22+1) = - log 2 ( х2 + 1)

log

1

2

Перепишем уравнение в виде

log 2 ( 4х4 + 3х2 + 6 ) = log 2 (3х2 + 6 ) + log 2( х2 + 1).

Отсюда

4х4 + 3х2 + 6 = (3х2 + 6 ) ( х2 + 1). T.e. х4 - 6 х2 =0.

Находим корни х.

**ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Это уравнения, содержащие неизвестную в показателе степени (основание которой не содержит неизвестной величины).

Простейшим - показательным уравнением является уравнение вида ах = в.

При а > 0, а ≠ 1, в > 0 оно решается с помощью логарифмирования:

х = log а в.

При а = 1 уравнение приобретает вид 1х = в и, следовательно, при в ≠ 1 решений не имеет, а при в = 1 его решением является множество всех действительных чисел.

Наконец, при а ≤ О показательная функция ах считается неопределенной, и поэтому уравнение (2) решений не имеет. Кроме того, при a>0 значения ах положительны, т.е. при а > 0 и в<0 уравнение также не имеет решений.

По поводу последнего абзаца следует сделать одну неприятную оговорку: хотя при а ≤ 0

функция ах считается неопределенной, однако для целых х = n или для рациональных х , имеющих вид дроби 𝑃⁄𝑞 с нечетным знаменателем, степень определена:

*; ;*

Поэтому при a < 0 уравнение (2) имеет, решение x = log|а||в|, если только:

а) число log|а||в| - рационально и имеет нечетный знаменатель,

б) знак *в* совпадает со знаком (−1)р , где Р- числитель несократимой дроби

log|а||в| = 𝑃⁄𝑞.

Как правило, в школьном курсе и на вступительных экзаменах эта неприятность обходится тем, что при a≤0 функция ах считаются неопределенной, так что с этой точки зрения, например, уравнение (−3)х = -27 решений не имеет, хотя при х = 3 и превращается в верное равенство.

Основной путь решения показательного уравнения состоит в сведении его при помощи надлежащих преобразований к решению уравнений простейшего вида (2). При этом часто используется следующий известный факт: если равны степени с одним и тем же (положительным) основанием, то равны показатели степени (либо основание равно единице), т.е. из равенства

а𝑢 = 𝑎𝑣 вытекает u = v, если а > 0, а ≠ 1

Пример 16.

Решить уравнение 9𝑥2+4𝑥−4,5 = 3

Решение. Удобно представить обе части уравнения как степени числа 9:

9𝑥2+4𝑥−4,5 = 90,5.

Приравниваем показатели и получаем уравнение 𝑥2 + 4𝑥 − 4,5 = 0,5, из которого находим решения данного уравнения: х1 = 1, х2 = -5.

Пример 17.

Решить уравнение 9х − 3х+1 − 54 = 0.

Решение. Здесь удобно свести показательные функции к одному основанию 3:

3х − 3 × 3х − 54 = 0.

Полудили квадратное уравнение для неизвестной 𝑢 = 3х :

𝑢2- 3 𝑢 – 54 = 0; его корни 𝑢1= 9, 𝑢2= - 6. Так как 𝑢 = 3х и не может принимать отрицательных значений, то подходит только решение 𝑢1= 9. Из равенства 3х = 9 находим единственный корень х = 2.

Пример 18.

Решить уравнение 3х+3 + 2 × 3х+2 = 5х+2 + 2 × 5х

Решение. Преобразуем обе части уравнения 3х+2 (3+2) = 5х( 52 + 2), или 3х+2 × 5 = 5х × 27 = 5х × 33, или 3х−1 = 5х−1.

Отсюда (3⁄5)х−1 = 1, т.е. х-1 = 0.

Итак, х = 1 – единственный корень.

Пример 19.

Решить уравнение .

Решение. Заметим, что числа  взаимно обратны: (

Поэтому обозначив  через 𝑢,перепишем уравнение в виде:

𝑢 - 1 = 2, умножая на 𝑢 (по смыслу 𝑢 > 0 ), получим:

𝑢

𝑢 2 - 2 𝑢 - 1 = 0 или 𝑢 . Таким образом, для х имеем две возможности:

или  , или 

Первое уравнение решений не имеет, так как его правая часть отрицательна. Второе эквивалентно

квадратному уравнению х2 − 5х + 5 = −1, так как ,

или х2 − 5х + 6 = 0, т.е. х1 = 2, х2 = 3 - решения исходного уравнения.

**"СМЕШАННЫЕ" УРАВНЕНИЯ**

это уравнения, которые могут одновременно содержать неизвестную и под знаком тригонометрических функций, и в показателе, и под знаком логарифма и т.д. Решаются эти уравнения применением всех подходящих методов, работающих при решении специальных типов уравнений. Рассмотрим примеры.

Пример 20.

Решить уравнение |х − 2|log3−х2−2logх9 = (х − 2)2.

Решение. Область допустимых значений ограничивается только тем, что неизвестная х является основанием логарифма, т.е. х> 0, х ≠ 1.

Учитывая, что а2 = |а|2, перепишем уравнение в виде

|х − 2|log3−х2−2logх9 = |х − 2|2 .

Это равенство будет иметь место только в двух случаях: при равенстве показателей степени - log3 − х2 − 2logх9 = 2 или при равенстве основания степени единице - |х - 2| = 1. Первая из этих возможностей приводит к уравнению относительно неизвестной, у = log3х если учесть, что х > 0, и поэтому,

log3х2 = 2log3х = 2у ; logх9 = loglog339х = 2у ).

Имеем 2у - 4 = 2 или у2 − у − 2 = 0. у

Отсюда у1 = 2, у2 = −1

Для х это дает два корня х1 = 9, х2 = 13

Вторая возможность осуществляется при х = 3 или

х = 1.

Значение х = 1 не входит в ОДЗ данного уравнения, значение же х = 3 удовлетворяет уравнению. Итак, уравнение имеет три корня:

х1 = 9, х2 = 13, х3 = 3.

**УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ**

Задачи на решение уравнений с параметрами (или на выяснение свойств этих решений) относятся к числу самых трудных, поскольку в них, как правило, уже приходится исследовать поведение решений в зависимости, от изменения параметра, что, в свою очередь, зачастую приводит и необходимости решать неравенства. Общие методы решения неравенств будут рассмотрены в следующем задании. А пока мы рассмотрим несколько примеров, не приводящих к сложным неравенствам.

Пример 21.

Найти все значения параметра *а ,*при каждом из которых число решений уравнения

3 ( х2 + а2) = 1 - (9а2 − 2) х не превосходит числа решений уравнения

x + (3а − 2) 2 × 3х = (8а − 4) log3 (3а2 − 12) – 3х3

Решение. Запишем первое уравнение в виде

3х2 + (9а2 − 2) х + 3а2- 1 = 0

Поскольку его дискриминант

D = 2(9а2 − 2) 2- 4× 3 × (3а2 − 1) = (9а2 − 4) 2 ≥ 0,

то это уравнение имеет решения при любом значении параметра *а*, причем решение одно, если 9а2 − 4 = 0, т.e. a = ∓ 2⁄3, и решения два во всех остальных случаях.

Второе исходное уравнение не имеет решений при *а* , удовлетворяющих условию 3а- ½ ≤ 0, так как при этих *а* не имеет смысла log 3(3ª - 1/2). Следовательно, ни одно из этих значений *а*, не удовлетворяет условию задачи.

Покажем, что второе уравнение при любом значении *а,* удовлетворяющем условию

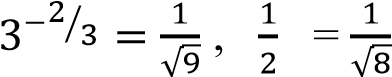
3ª- ½ > 0, более одного решения иметь не может. Предположим, что это не так, т.е. предположим, что существует значение а0 удовлетворяющее условию 3а0 - ½ > 0, такое, что существуют два раз- личных решения уравнения х1,х2, причем х1 > х2 Тогда справедливы следующие равенства: *х*1 + (3а0 − 2)2 × 3х1= (8а − 4) log 3(3ª - 1/2) - х13 и *х*2 + (3а0 − 2)2 × 3х2= (8а − 4) log 3(3ª - 1/2) - х23

Вычитая из первого второе, находим:

(х1 − х2 ) + (3а0 − 2)2(3х1 − 3х2) + 3( х13 − х23) = 0.

Но х1 > х2, поэтому каждое слагаемое в левой части этого равенства положительно (кроме, быть может, второго, которое не отрицательно) и, следовательно, их сумма равняться нулю не может. Противоречие.

Итак, нам осталось исследовать значения параметра, при которых первое уравнение имеет одно решение, т.е. а = ∓ 2⁄3

Пусть а = - 2⁄3. В этом случае так как  и 19 < 18 , то 3а -1 2 = 3−2⁄3 -  <0

и это значение параметра *а* условию задачи не удовлетворяет потому, что второе уравнение не имеет смысла. Пусть *а* = 2/3 . В этом случае 3а - = 32⁄3 - > 0

и второе уравнение запишется в виде х + 3х3 = 0; это уравнение имеет единственное решение: х = 0. Так как при *а* = 2/3 оба уравнения имеют по одному решению, то это значение параметре удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а = 2⁄3.

Обратим внимание на то, что нам не пришлось здесь решать в общем виде ни первое, ни второе уравнение. Больше того, используя только школьный материал, второе уравнение невозможно решить в общем виде. Это, конечно, немного помогает в решении, так как заставляет искать другие пути. Следующий простенький пример в этом смысле поучителен, так как "прямой" путь его решения возможен, но он значительно длиннее "оптимального"

Пример 22.

Найти все значения *а,* при каждом из которых уравнение х2 + 2(а − 1)х + 3а = 0 имеет хотя бы один корень по модулю равный 3.

"Прямое"решение.

По формуле решения, квадратного уравнения находим

х.

Теперь возможны четыре случая: х1 = 3, х1 = −3 , х2 = 3, х2 = −3.

Далее следует решение четырех иррациональных уравнений с неизвестной *а.*

"Оптимальное" решение.

По определению решения число 3 (или - 3) будет таковым тогда и только тогда, когда исходное уравнение превращается в верное числовое равенство при подстановке х = 3 (соответственно х =- 3 ). Имеем

32 + 2(а − 1) × 3 + 3а + 1 = 0, т.e. 9а + 4 = 0, откуда а = - 4⁄9.

Аналогично (−3)2 + 2(а − 1) × (−3) + 3а + 1 = 0,

а = .

Ответ: а = - 4⁄9 или а = .

**КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ**

**по теме: «Иррациональные уравнения»**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | I вариант | II вариант | Балл |
| 1 | =2 | =8 | 1б |
| 2 | =4 | =5 | 2б |
| 3 | =5 | =2 | 3б |
| 4 | =3х | =х | 4б |
| 5 | + = | - = | 3б |
|  | Итого: 13б | | |

**Правильные ответы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | I вариант | II вариант |
| 1 | Х=-1 | Х=-21 |
| 2 | Х=9,5 | Х=10 |
| 3 | Х=128 | Х= -5; х=5 |
| 4 | = и = | Х=1 |
| 5 | Х=0 |  |

**КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ**

**по теме: «Показательные уравнения»**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | I вариант | II вариант | Балл |
| 1 | =4 | =27 | 1б |
| 2 |  | 5 | 2б |
| 3 | = | =12 | 3б |
| 4 |  | =1 | 4б |
| 5 |  |  | 3б |
| Итого: 13б | | | |

**Правильные ответы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | I вариант | II вариант |
| 1 | Х=3 | Х=1 |
| 2 | Х=1 | Х=2, х=0 |
| 3 | Х=2 | Х=1 |
| 4 |  |  |
| 5 | (2https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image059.gif | (3https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image060.gif) |

**Контрольно измерительные материалы по теме: «Логарифмические уравнения»**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **I вариант** | **II вариант** |
| 1 | 1. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image062.gif | 1. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image063.gif |
| 2 | 2. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image064.gif | 2. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image065.gif |
| 3 | 3. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image066.gif | 3. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image067.gif |
| 4 | 4. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image068.gif | 4. https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image069.gif |
| 5 | 5. Решить уравнение графически:  https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image070.gif | 5. Решить уравнение графически:  https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image071.gif |

**Правильные ответы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | I вариант | II вариант |
| 1 | Х=8 | Х=46 |
| 2 | Х=6 | Х=3 |
| 3 | 1https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image072.gif | 1https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image072.gif |
| 4 | https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image073.gif | хhttps://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image074.gif |
| 5 | (https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image075.gif | (3;1) |

**Контрольно измерительные материалы по теме: «Тригонометрические уравнения»**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | I вариант | II вариант |
| 1 | . Решить уравнение:  (1+2cosx)(1-3cosx)=0 | 1. Решить уравнение:  (1-2cosx)(2+3cosx)=0 |
| 2 | Решить уравнение:  sinx=2cosx | 2. Решить уравнение:  2sinx+cosx=0 |
| 3 | Вычислить:  arccos1+arcsin | 3. Вычислить:  arccos https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image109.gif-arcsinhttps://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image110.gif |
| 4 | Решить уравнение:  2cos2x+5cos=3 | 4. Решить уравнение:  3sin2x-5sinx-2=0 |
| 5 | Докажите тождество:  (sinx-cosx)2=1-sin2x | 5. Докажите тождество:  sin2x=(sinx+cosx)2 |

**Правильные ответы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | I вариант | II вариант |
| 1 | Х=±https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image111.gif+2https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif  Х=±аrccoshttps://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image023.gif+2https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif | Х=±https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image113.gif+2https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif  Х=±(https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image114.gifаrccoshttps://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image115.gif+2https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif |
| 2 | Х=arctg2+https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif | Х=-arctghttps://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image022.gif+https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif |
| 3 | -https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image116.gif | https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image117.gif |
| 4 | X=±https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image113.gif+2https://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image112.gif | X=(-1)nhttps://documents.infourok.ru/16ae4fc7-e6dd-4ded-82ef-9ce70072c68f/0/image118.gif |
| 5 | Тождество верно | Тождество верно |

**Заключение**

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте, вместе с развитием общества меняются и взгляды людей, возникают новые мысли и идеи. И XXI век не стал в этом смысле исключением. Появление компьютеров внесло свои корректировки в способы решения уравнений и значительно их облегчило. Но компьютер не всегда может быть под рукой (экзамен, контрольная), поэтому знание хотя бы самых главных способов решения уравнений необходимо знать. Использование уравнений в повседневной жизни – редкость. Они нашли свое применение во многих отраслях хозяйства и практически во всех новейших технологиях.

**Список литературы**

Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике И.П .Рустюмова, С.Т.РустюмоваАлматы2007

2.        Амелькин В.В. Задачи с параметрами [Текст] / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – М.: Асар, 1996.

3.        Башмаков М.И., Братусь Т.А. и др. Алгебра и начала анализа 10-11. Дидактические материалы. М.: Дрофа, 2003.

4.   Крамор В. С. Примеры с параметрами и их решение [Текст]: пособие для поступающих в вузы / В.С. Крамор. - М.: АРКТИ, 2000.-с. 48.

5.        Мордкович А.Г. Решаем уравнения. – М.: Школа-Пресс, 1995.

6.        Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник. – М.: Изд-во Факториал, 1997.

7.   Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач [Текст]: учебное пособие для 10 класса средней школы / И. Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.

8.        Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ. – СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004.

***для  обучающихся:***

1.         Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2007.

2.         Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2007.

***Интернет-ресурсы:***

1.   Цифровые образовательные ресурсы (ЦОР) к учебникам издательства "Мнемозина" представлены на сайте  <http://school-collection.edu.ru/>

2.   [***www.math.ru***](http://www.math.ru)Интернет - поддержка учителей математики, материалы для уроков, официальные документы Министерства образования и науки, необходимые в работе.

3.   [***www.it-n.ru***](http://www.it-n.ru)Сеть творческих учителей.

4.   [***www.problems.ru***](http://www.problems.ru)База данных задач по всем темам школьной математики. Задачи разбиты по рубрикам и степени сложности. Ко всем задачам приведены решения.

5.   [***www.college.ru/mathematics***](http://www.college.ru/mathematics)Математика на портале «Открытая школа». Можно найти учебный материал по различным разделам математики.

